Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 38-1999

Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern

von

Jens Baaran

Institut für Angewandte Mechanik

Technische Universität Braunschweig

Herausgegeben vom Mechanik-Zentrum der
Technischen Universität Braunschweig

Schriftleiter: Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Institut für Angewandte Mechanik
Postfach 3329
38023 Braunschweig

Tel.: 0531 / 391-7101
Fax: 0531 / 391-5843

Vom Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Technischen Universität Braunschweig genehmigte Dissertation

Tag der Einreichung: 30.03.1999
Tag der Prüfung: 09.06.1999

Berichter:

Prof. Dr. rer. nat. H. Antes
Prof. Dr.-Ing. O. von Estorff

BSM 38-1999
ISBN 3-920395-37-9

Jens Baaran

Zusammenfassung

Das Thema der Arbeit ist die Entwicklung einer 3-D Randelementmethode für die Bestimmung der Abstrahlung, Reflektion und Beugung eines Schallfelds im Falle mehrerer, sich unabhängig voneinander bewegender und schwingender Körper.

Ausgehend von der Differentialgleichung für die lineare Akustik kann die sogenannte allgemeine KIRCHHOFFsche Integralgleichung hergeleitet werden. Sie ist die Ausgangsgleichung für das numerische Näherungsverfahren. Bei der Untersuchung sich bewegender Körper beziehungsweise der Wirkungen ihrer Oberflächen auf das Schallfeld ist eine Berechnung im Zeitbereich unumgänglich. Da eine direkte Randelementmethode zum Einsatz kommt, treten in der Formulierung singuläre Integrale auf, denen bei der Auswertung besondere Aufmerksamkeit entgegengebracht werden muß. Der numerische Aufwand für die Berechnung und Lösung der entstehenden Gleichungssysteme kann bei einer Beschränkung auf geradlinige Bewegung und konstante Geschwindigkeit der Körper beziehungsweise deren Ränder erheblich reduziert werden.

Anhand einiger einfacher Beispiele wird das Stabilitätsverhalten und die Genauigkeit des Verfahrens analysiert. Ein Vergleich der numerischen Berechnung mit einer analytischen Lösung zeigt, daß die Methode auch bei großen Unterschallgeschwindigkeiten gut einsetzbar ist. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens wird an zwei realitätsnahen Beispielen demonstriert.

Abstract

Subject of the present work is to develop a 3-D boundary element method for determining the radiation, the reflexion and the diffraction of the sound field of several vibrating bodies moving independently.

Starting from the differential equation for linear acoustics, the so called general KIRCHHOFF formula can be derived. This integral equation is the basis for the numerical approximation by the boundary element method. For the investigation of the sound field of bodies moving independently, an evaluation in the time domain is inevitable. The singular integrals, which arise in the direct BEM, require a careful evaluation. The numerical effort for the calculation and solution of the arising systems of equations can be reduced considerabily by restricting the movement of the sound sources to uniform translation with constant velocity.

The stability and accuracy of the method is investigated using some simple examples. A comparison with an analytical solution shows that the application of the presented method is possible even at high subsonic speeds. The performance of the algorithm is demonstrated by the computation of two realistic examples.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Stand der Forschung 2

1.1.1 Theoretische Grundlagen 2

1.1.2 Schallanalyse bei bewegten Rändern und Oberflächen . 2

1.1.3 Numerische Methoden für die Schallanalyse 4

1.2 Ziele der Arbeit 5

2 Grundlagen **7**

2.1 Das kompressible Fluid 7

2.2 Grundgleichungen 8

2.2.1 Massenbilanz 9

2.2.2 Impulsbilanz 9

2.2.3 Linearisierung 10

2.2.4 Zustandsgleichung 11

2.3 Lineare Wellengleichung 12

2.3.1 Druckformulierung 12

2.3.2 Potentialformulierung 13

2.3.3 Die konvektive Wellengleichung 14

2.4 Rand– und Anfangsbedingungen 14

2.5 Kinematik bewegter Schallquellen 16

2.6 Lösungen der Differentialgleichung 19

2.6.1 Die Fundamentallösung für stationäre Schallquellen . . 20

2.6.2 Lösungen für bewegte Punktquellen 21

2.7 Eigenschaften der Lösungen für Punktquellen 23

2.8 Schallreflektion an einer Halbraumebene 26

3 Randintegralgleichung **28**

3.1 Ansatz von Morino/Gennaretti 29

3.2 Beziehung zur Formulierung nach Farassat/Myers 34

4 Randelementmethode **35**
4.1 Singuläre Integrale . . . 35
4.2 Diskretisierung und Approximation . . . 41
4.2.1 Ortsansatz . . . 41
4.2.2 Zeitansatz . . . 44
4.3 Punktkollokation . . . 45
4.4 Numerische Auswertung der Integrale . . . 51

5 Verifikationsbeispiele **54**
5.1 Stabilität . . . 54
5.1.1 Innenraumproblem: Quader . . . 54
5.1.2 Außenraumproblem: pulsierende Kugel . . . 57
5.2 Umströmte Kugel: Geschwindigkeitspotential . . . 62
5.3 Sich bewegende Kugel: Schalldruck infolge Punktquelle . . . 66
5.3.1 Stationäre Punktquelle . . . 69
5.3.2 Bewegter Rand . . . 70
5.3.3 Druckverteilung im Außenraum . . . 78

6 Erweiterung der Formulierung auf mehrere Ränder **80**
6.1 Der sich unabhängig bewegende Beobachter . . . 80
6.2 Auswirkungen auf das Gleichungssystem . . . 81

7 Anwendungsbeispiele **85**
7.1 Hochgeschwindigkeitszug . . . 85
7.2 Vergleich: fahrende Punktquellen – bewegter Rand . . . 90
7.3 Zwei an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Pkw . . . 93
7.4 Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf . . . 99
7.4.1 Ablaufschema des Programms . . . 99
7.4.2 Sich bewegende Kugel mit Außenpunkten . . . 101
7.4.3 Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3 . . . 102

8 Zusammenfassung und Ausblick **105**

A Verwendete Symbole und nützliche Beziehungen **108**

B Speichertechnik **112**

C Herleitung der Integralgleichung nach Farassat/Myers **113**

Literaturverzeichnis **125**

1 Einleitung

Neue Verkehrsbauwerke, insbesondere Autobahnen oder Eisenbahnstrecken in dicht besiedelten Gebieten, sind nur durchsetzbar, wenn die davon betroffene Bevölkerung vom Lärm, der von diesen Bauwerken ausgeht, abgeschirmt wird. Dies kann häufig nicht allein mit besserer Schalldämmung der Gebäude erreicht werden, weil dadurch der Schallpegel der äußeren Umgebung nicht reduziert werden kann. Handelt es sich um oberirdische Verkehrsbauten, beispielsweise Schnellstraßen oder Eisenbahntrassen, sind Schallschutzwände oft die einzige Möglichkeit, einen wirksamen Lärmschutz auf begrenzter Grundfläche zu erreichen.

Es genügt allerdings nicht, die Auswirkungen stationärer Schallquellen auf die Bauwerke zu untersuchen. Auch die Abstrahlcharakteristik sich bewegender schallerzeugender Körper, also der Verkehrsmittel, übt einen wesentlichen Einfluß auf ein Schallfeld aus. Insbesondere die Wechselwirkungen zwischen sich bewegenden Schallquellen und stationären Bauwerken können von großer Bedeutung sein, wenn sich die verschiedenen Körper dicht aneinander vorbei bewegen. Um diese Einflüsse zu berücksichtigen und die gerichtete Schallabstrahlung von Oberflächen zu simulieren, müssen die *Oberflächen* der bewegten Körper mit erfaßt werden.

Diese Arbeit stellt ein numerisches Näherungsverfahren (eine Randelementmethode) vor, mit dessen Hilfe Schallabstrahlungen der Oberflächen mehrerer unabhängig bewegter Körper sowie deren akustische Interaktionen mit den umgebenden Bauwerken simuliert werden können. Das Schallfeld im Außenraum kann ebenfalls berechnet werden. So läßt sich bereits in der Planungsphase einer Lärmschutzmaßnahme eine Bewertung derselben vornehmen, die nicht auf den recht groben Faustformeln der entsprechenden Normen basiert, sondern auf der grundlegenden Differentialgleichung der linearen Akustik aufbaut: der Wellengleichung.

1.1 Stand der Forschung

1.1.1 Theoretische Grundlagen

Die Wellengleichung beschreibt sowohl die Ausbreitung akustischer Druckwellen in einem kompressiblen Fluid, als auch – in ihrer Potentialformulierung mit dem Geschwindigkeitspotential als führender Feldgröße – die laminare Strömung um im Fluid befindliche Körper. Man spricht auch von einer "akustischen Analogie" zwischen Potential- und Druckformulierung. Des weiteren beschreibt die Wellengleichung die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, wie z.B. Licht. Für die Beschreibung dieser Probleme wurde die 1882 von KIRCHHOFF veröffentlichte und nach ihm benannte Integralgleichung zunächst angewendet. Sie beschreibt das Potential- oder Schallfeld bei homogenen Anfangsbedingungen allein durch Randintegrale über die im Feld vorhandenen Oberflächen.

Eine Erweiterung der KIRCHHOFFschen Integralgleichung wurde zuerst 1930 von MORGANS in [37] für bewegte Oberflächen vorgestellt. Diese Arbeit wurde 1969 von FFOWCS WILLIAMS/HAWKINGS für fehlerhaft gehalten, FARASSAT/MYERS zeigten jedoch 1988 in [18], daß MORGANS Ergebnisse in der Tat korrekt waren. FFOWCS WILLIAMS/HAWKINGS [20] gaben statt dessen eine andere Integralgleichung an, die sowohl die Effekte von bewegten Oberflächen im Schallfeld, wie auch nichtlineare Effekte wie Turbulenz berücksichtigte. Sie machten Gebrauch von der Distributionstheorie, wodurch die Herleitung der Gleichungen im Vergleich mit der Arbeit von MORGANS stark vereinfacht wurde. Allerdings verblieben bei ihrer Formulierung Differentialoperatoren außerhalb der Randintegrale, was die Anwendung von Randelementverfahren auf diese Formulierung zunächst verhinderte.

1.1.2 Schallanalyse bei bewegten Rändern und Oberflächen

In den siebziger Jahren entstand in erster Linie die Theorie zur numerischen Lösung der Wellengleichung, während die rapide ansteigenden Rechnerkapazitäten in den achtziger und neunziger Jahren die Anwendung dieser Ergebnise in immer leistungsfähigeren Rechenprogrammen vorangetrieben wurde.

So war die Arbeit von FFOWCS WILLIAMS/HAWKINGS der Grundstein für eine Forschergruppe um FARASSAT, die sich seit dem Beginn der siebziger Jahre mit der Berechnung der Schallfelder von Hubschrauberrotoren beschäftigten [16]. FARASSAT modifizierte die sogenannte FFOWCS WILLIAMS/HAWKINGS-Gleichung und entwickelte eine Formulierung ("integral representation"), deren Nachteil jedoch ist, daß zur Berechnung des Außenraumproblems die Kenntnis der Geometrie und die Bewegung der im Schallfeld befindlichen Ränder nicht ausreicht. Der Schalldruck auf den Oberflächen muß im Experiment bestimmt werden und geht als Eingangsparameter in die Berechnungen ein. In einer Arbeit von FARASSAT/SUCCI wird dieses Verfahren vorgestellt [19].

Erste Anwendungen einer indirekten Randelementmethode auf Strömungsprobleme wurden von HESS/SMITH in [26] vorgestellt. Daran anknüpfend entwickelt eine Gruppe um MORINO seit Anfang der siebziger Jahre eine direkte Randelementformulierung (“integral equation”) [41]. Diese Gruppe interessiert sich vor allem für die Strömung um Flugzeugtragflächen und Hubschrauberrotoren. Im Brennpunkt steht zunächst die Wirbelschicht, die bei auftrieberzeugenden Körpern entsteht und einen großen Einfluß auf die Strömungseffekte hat, aber noch mit linearen Methoden berücksichtigt werden kann. In späteren Arbeiten wird auf nichtlineare Effekte (transsonische Effekte, Überschall, Viskosität) eingegangen [39] [40].

1983 stellt LONG in [32] eine auf FARASSATs Lösung der FFOWCS WILLIAMS/HAWKINGS-Gleichung basierende direkte Randelementmethode vor. Er berechnet die stationäre Druckverteilung auf Helikopterflügeln und Tragflächen mit einer linearen Randelementformulierung.

In der schon erwähnten Arbeit [18] schlagen 1988 FARASSAT/MYERS für die Berechnung bewegter Schallquellen die Verwendung von MORGANS’ sogenannter allgemeiner KIRCHHOFFscher Integralgleichung vor, die sie mit der Distributionstheorie leichter verständlich herleiten. Sie schlagen vor, die schallabstrahlenden Oberflächen mit einer geschlossenen Oberfläche zu umgeben, innerhalb derer nichtlineare aerodynamische Berechnungen durchgeführt werden. Diese liefern die Randbedingungen für das Außenraumproblem außerhalb der fiktiven Oberfläche. Die Schallausbreitung im Fernfeld kann anschließend mit der allgemeinen KIRCHHOFFschen Integralgleichung berechnet werden. Diese Idee wurde 1992 von MYERS/HAUSMANN [43] und 1996 von LYRINTZIS/MANKBADI [33] aufgegriffen, die Randelementmethoden für den Frequenzbereich entwickelten.

Die Artikel [7] und [38] geben eine detailliertere Übersicht über die jeweiligen Entwicklungen der Gruppen um MORINO und FARASSAT.

Unabhängig von den Gruppen um FARASSAT und MORINO entstanden zwischen 1985 und 1996 Arbeiten von ASTLEY/BAIN [4], WU/LEE [53] und DE LACERDA/WROBEL/MANSUR [10]. Sie behandeln direkte 2-D und 3-D Randelementmethoden für die Schallabstrahlung in Unterschallströmungen. Da die Untersuchungen im Frequenzbereich stattfinden, kann nur ein einzelner Rand untersucht werden.

1.1.3 Numerische Methoden für die Schallanalyse

Die heute am weitesten verbreitete Methode für die numerische Simulation mechanischer Probleme ist die Finite-Element Methode (FEM), die sehr vorteilhaft für die Berechnung abgeschlossener Systeme eingesetzt werden kann [5] [54]. Ein besonderer Vorteil der FEM ist, daß Nichtlinearitäten ohne großen Aufwand berücksichtigt werden können. Weil jedoch das gesamte Gebiet diskretisiert werden muß, ist zum einen die Untersuchung von Außenraumproblemen, d.h. unendlicher Gebiete, nicht ohne weiteres möglich, zum anderen entstehen recht große Gleichungssysteme.

Wenn die Anwendbarkeit einer linearen Formulierung vorausgesetzt werden kann, bietet sich die Randelementmethode (REM) als Alternative zur FEM an [6]. Diese beschreibt ein Problem allein durch *Randgrößen*, was bedeutet, daß nicht mehr das dreidimensionale Gebiet, sondern nur noch zweidimensionale *Oberflächen* diskretisiert werden müssen. Die resultierenden Einflußmatrizen für ein Problem sind demzufolge wesentlich kleiner als bei der FEM. Außerdem ist die SOMMERFELDsche Abstrahlbedingung, die bei der Untersuchung von Außenraumproblemen eine Rolle spielt, automatisch erfüllt.

Die Berechnung von Abstrahlungsproblemen der Akustik erfolgt aufgrund der genannten Vorteile immer öfter mit Randelementmethoden. Diese kommen für Untersuchungen im Frequenzbereich seit einiger Zeit auch in kommerziellen Programmen zum Einsatz [48] [15]. Insbesondere bei Außenraumproblemen und niedrigen Frequenzen stellt die REM inzwischen eine Art Quasi-Standard dar [14] [51].

Die Grundlagen für eine Randelementformulierung im Zeitbereich wurden 1968 von CRUSE und RIZZO in [9] und [8] veröffentlicht. Erste Anwendungen auf die Wellengleichung im 2-D Fall stammen von MANSUR und BREBBIA [34] [35], DOHNER/SHOURESHI/BERNHARD [12] setzten die REM auch für Berechnungen im dreidimensionalen Raum ein. ANTES beschreibt die Methode der Randelemente [2] und demonstriert ihre Leistungsfähigkeit anhand von Anwendungen unter anderem in der Fluiddynamik, insbesondere der Akustik [3]. MEISE entwickelt 1990 ein Zeitschritt-Randelementeverfahren [36] zur Berechnung von Problemen der Fluiddynamik und stellt Untersuchungen zur Stabilität des Zeitschrittverfahrens an, die von JÄGER fortgeführt und um adaptive Methoden hinsichtlich der Ortsdiskretisierung ergänzt werden. Sie stellt 1994 ein Randelementverfahren zur Berechnung bewegter Punktquellen vor [28]. Maßnahmen zur Steigerung der Effizienz der REM insbesondere im Frequenzbereich werden in [51] von TRÖNDLE veröffentlicht.

Hinsichtlich der Anwendbarkeit der Methoden, die auf der numerischen Lösung von Differentialgleichungen basieren, sei erwähnt, daß der numerische Aufwand hier sehr groß ist. Der Einsatz dieser Verfahren stößt bei wachsender zu untersuchender Anregungsfrequenz an eine Grenze, ab der die Berechnungen den vertretbaren Aufwand überschreiten. Bei hochfrequenten Schallausbreitungsvorgängen, wo Beugungs- und Brechungseffekte keinen wesentlichen Einfluß mehr haben, können sogenannte Raytracingverfahren eingesetzt werden. Diese Verfahren behandeln die Schallausbreitung ähnlich wie die Ausbreitung von Lichtstrahlen.

1.2 Ziele der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines Algorithmus zur Berechnung des Schallfelds, das durch mehrere sich unabhängig voneinander bewegende und Schall abstrahlende sowie reflektierende Oberflächen erzeugt wird.

Als numerisches Verfahren bietet sich die Randelementmethode an, da die zugrundeliegenden Differentialgleichungen in guter Näherung linearisiert und Außenraumprobleme untersucht werden können. Einerseits spart man sich gegenüber der FEM die Diskretisierung des Gebietes, anderseits ist die SOMMERFELDsche Abstrahlbedingung a priori erfüllt.

In Abschnitt 2 werden die Grundgleichungen der linearen Akustik kompressibler Fluide vorgestellt, aus denen sich die Wellengleichung ergibt. Unter Verwendung der Fundamentallösung der Wellengleichung kann in Abschnitt 3 die sogenannte allgemeine KIRCHHOFFsche Integralgleichung hergeleitet werden. Sie beschreibt das Schallfeld eines bewegten schallabstrahlenden Körpers und enthält lediglich Randintegrale über dessen Oberfläche.

In Kapitel 4 wird ausgehend von der KIRCHHOFFschen Integralgleichung eine Randelementmethode entwickelt. Es wird ein direktes Kollokationsverfahren angewendet, das sich bezüglich des numerischen Aufwands gegenüber den GALERKIN-Verfahren als günstiger herausgestellt hat [28]. Dabei wird eine konstante geradlinige Bewegung mit Unterschallgeschwindigkeit aller beteiligten Ränder angenommen, so daß der Aufwand zur Berechnung und Lösung des entstehenden Gleichungssystems in einem vertretbaren Rahmen bleibt. Wegen der unterschiedlichen Bewegung der Ränder kann sich kein stationärer Zustand ausbilden, so daß nur eine Zeitbereichsformulierung in Frage kommt.

In Kapitel 5 wird die Randelementmethode anhand einiger einfacher Beispiele getestet. Betrachtungen zur Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens werden angestellt, bevor in Abschnitt 6 die Erweiterung der Formulierung auf mehrere unabhängig bewegte Oberflächen besprochen wird. Daran schließt sich die Berechnung zweier realistischer Beispiele an, die die Leistungsfähigkeit des Verfahrens unter Beweis stellen.

2 Grundlagen

Bewegt sich ein schallemittierender Körper durch ein Fluid, ist dies automatisch mit Strömungsvorgängen verbunden. Zunächst werden deshalb einige grundsätzliche Betrachtungen zur Fluidmechanik angestellt.

2.1 Das kompressible Fluid

Das Medium ist in diesem Fall ein Gas (Luft), also ein kompressibles Fluid. Analog zum HOOKEschen Gesetz für Festkörper ergibt sich für ein solches Medium der Kompressionsmodul K aus Volumenänderung pro Drucksteigerung. Aus einer Volumenverkleinerung (∂V, negativ) folgt eine Druckerhöhung (∂p, positiv).

$$K = -\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial p}$$

Die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen eines Gases sind zwar sehr viel kleiner als in Festkörpern, trotzdem können auch Gase beim Verformen Spannungen aufnehmen. Diese sind abhängig von der Verformungsgeschwindigkeit des Fluids. Die Viskosität ist ein Maß für die durch innere Reibung bestimmte Verschiebbarkeit der Teilchen gegeneinander. Nichtlineare Phänomene wie Turbulenz sind stark von der Viskosität des Fluids abhängig.

Die dynamische Grundgleichung für ein Fluid läßt sich nach NEWTON als dynamisches Kräftegleichgewicht schreiben [47]:

$$\boldsymbol{f}_B = \rho\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}_G + \boldsymbol{f}_D + \boldsymbol{f}_V + \boldsymbol{f}_T\,. \tag{2.1}$$

Die spezifische (auf ein Volumen ΔV bezogene) Trägheitskraft ist gleich der Summe der spezifischen Gewichts-, Druck-, Viskositäts- und Turbulenzkräfte. Bei realen Fluiden sind in fast allen Strömungsvorgängen alle Terme in Gleichung (2.1) ungleich null. Häufig reicht es jedoch aus, eine vereinfachte Formulierung zu verwenden, bei der einige Terme vernachlässigt werden können. Man unterscheidet bei realen Fluiden

- Turbulente Strömung
  Dies ist der allgemeine Fall. Alle Terme in Gleichung (2.1) bleiben bestehen. Es gelten die sehr komplizierten sogenannten REYNOLDSschen Bewegungsgleichungen.

- Laminare Strömung: $\boldsymbol{f}_T = 0$
  Turbulenz ist vernachlässigbar. Es entstehen die NAVIER-STOKES-Gleichungen.

- Reibungsfreie Strömung: $\boldsymbol{f}_T = \boldsymbol{f}_V = 0$
  Dies ist ein Idealfall, solche Strömungen kommen in der Wirklichkeit nicht vor. Aus Gleichung (2.1) werden die EULERschen Bewegungsgleichungen. Fluide die diese Gleichungen erfüllen werden als *ideale Fluide* bezeichnet.

- Fluid in Ruhe (Aerostatik): $\boldsymbol{f}_T = \boldsymbol{f}_V = \boldsymbol{f}_B = 0$
  Es wirken lediglich Druck- und Gewichtskräfte.

Es wird angenommen, daß Fluidströmungen *außerhalb* der sich bewegenden Oberfläche *keinen* Einfluß auf die Schallausbreitung haben. Somit betrachten wir den *aerostatischen* Fall. Wenn diese Annahme für das Außenraumproblem außerhalb der *realen* Oberfläche nicht zutrifft, muß diese zusammen mit den Bereichen der Fluidströmung von einer *fiktiven* Oberfläche umschlossen werden. Die in den folgenden Kapiteln vorgestellte Methode kann nur für das Außenraumproblem außerhalb dieser fiktiven Oberfläche angewendet werden. Hier gilt die Differentialgleichung der linearen Akustik eines kompressiblen Mediums – die Wellengleichung –, die im nun folgenden Abschnitt hergeleitet wird.

2.2 Grundgleichungen

Schall ist die Aufeinanderfolge kleiner Verdichtungen und Verdünnungen im Fluid. Diese Druckschwankungen können durch die Vibration der im Fluid befindlichen Körper entstehen. Sie werden von deren Oberflächen an die angrenzenden Luftteilchen übertragen und pflanzen sich im Fluid mit der Wellengeschwindigkeit fort. Die Wellengleichung, die die Ausbreitung dieser Longitudinalwellen beschreibt, läßt sich aus Massenbilanz, Impulsbilanz und der Zustandsgleichung idealer Gase herleiten.

2.2.1 Massenbilanz

Betrachtet wird ein Körper Ω, der sich in einem Geschwindigkeitsfeld bewegt. Über die Oberfläche dieses Körpers findet kein Massenaustausch statt. Die zeitliche Änderung der Masse des Körpers ist also gleich der Rate, mit der im Körper selbst Masse entsteht. Diese wird durch eine Quellenbelegung $a(\boldsymbol{x}, t)$ erfaßt. Die Massenbilanz für den Körper Ω lautet also:

$$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int\limits_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega} \rho a \, \mathrm{d}V$$

mit der Dichteverteilung $\rho(\boldsymbol{x}, t)$. Wir betrachten ein im Geschwindigkeitsfeld "mitschwimmendes" Volumen. Demnach ist die Zeitableitung als *materielle* oder *substantielle* Zeitableitung zu verstehen. Zu beachten ist die Zeitabhängigkeit der Integrationsgrenzen.

Unter Zuhilfenahme des REYNOLDSschen Transporttheorems ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int\limits_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V &= \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} \right] \mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \mathbf{grad} \rho + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} \right] \mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega} \rho a \, \mathrm{d}V \,. \end{aligned}$$

Da obige Integralgleichung für eine beliebige Wahl des Integrationsgebiets gültig sein muß, kann man die Kontinuitätsgleichung in ihrer differentiellen Form schreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) - \rho a = 0 \,.$$

2.2.2 Impulsbilanz

Laut zweitem NEWTONschen Gesetz ist die zeitliche Änderung des Impulses $\boldsymbol{I}$ gleich der Summe der am Körper angreifenden Kräfte:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{I}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{D}t} \,.$$

Nicht nur die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ sondern auch die Masse m ist eine Funktion der Zeit, denn mittels innerer Quellen kann sich die Masse in einem Kontrollvolumen Ω ändern. Die integrale Formulierung der Impulsbilanz für ein beliebiges

Kontrollvolumen Ω lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{I}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{\Omega} \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V &= \int\limits_{\Omega}\left[\frac{\mathrm{D}(\rho\boldsymbol{v})}{\mathrm{D}t} + \rho\boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right]\,\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\Gamma} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}O\,.\end{aligned}$$

Die Summe der angreifenden Kräfte auf der rechten Seite der obigen Gleichung setzt sich aus den Volumenkräften $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)$ und dem auf die Körperoberfläche wirkenden Druck $p\boldsymbol{n}$ zusammen. Der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ zeigt aus dem Körper heraus in den Außenraum. Das Integral über die Körperoberfläche kann mit dem Satz von GAUSS in ein Volumenintegral überführt werden:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t} + \boldsymbol{v}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right]\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\Omega}\mathbf{grad}p\,\mathrm{d}V\,.$$

Die differentielle Formulierung lautet:

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t} + \boldsymbol{v}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}p - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\,.$$

2.2.3 Linearisierung

Die Impulsbilanz und die Kontinuitätsgleichung sind nichtlineare Differentialgleichungen. Die beim Schall auftretenden Änderungen der Zustandsgrößen sind jedoch klein, so daß es ausreicht, eine lineare Formulierung zu verwenden. Es wird angenommen, daß das Medium in Ruhe ist ($\boldsymbol{v}_0 = 0$) und überall eine Ruhedichte ρ_0 bei einem statischen Ruhedruck p_0 einnimmt. Des weiteren sei die statische Quellenbelegung a_0 gleich Null. Das heißt, daß entstandenes Fluid auch wieder vernichtet wird. Durch kurzfristig entstehende und vernichtete Materie sollen lediglich lokale Druckschwankungen herbeigeführt werden, die zur Wellenentstehung beitragen. Alle Größen schwanken mit kleiner Amplitude um ihren statischen Ausgangszustand. Diese Schwankungen werden mit dem Index "$_1$" gekennzeichnet:

$$a = a_0 + a_1 = a_1\,,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\,,\ p = p_0 + p_1\,,\ \rho = \rho_0 + \rho_1$$

Diese Beziehungen werden in die Kontinuitätsgleichung und in die Impulsbilanz eingesetzt. Terme, die von höherer Ordnung klein sind, werden vernachlässigt.

Damit lautet die Impulsbilanz:

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + \mathbf{grad} p_1 = \boldsymbol{b} \,. \tag{2.2}$$

Die Massenbilanz vereinfacht sich zu:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \mathrm{div} \boldsymbol{v}_1 = \rho_0 a_1 \,. \tag{2.3}$$

2.2.4 Zustandsgleichung

Für die Verknüpfung der Kontinuitätsgleichung mit der Impulsbilanz wird noch ein Materialgesetz benötigt. Setzt man eine temperaturkonstante (isotherme) Zustandsänderung voraus, erhält man den isothermen Kompressionsmodul üblicherweise aus der Ableitung des Volumens oder der Dichte nach dem Druck:

$$K_T = -\frac{1}{V_0} \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T = \frac{1}{\rho_0} \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_T \,.$$

Mit der Zustandsgleichung idealer Gase

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R T_0 \,,$$

die Druck, Dichte und Temperatur eines Zustands über die Gaskonstante R miteinander verknüpft, erhält man für $K_T = 1/p_0$. Bei kleinen Dichteschwankungen ρ_1 gilt näherungsweise

$$\rho_1 = \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_T p_1 = \rho_0 K_T p_1 \,. \tag{2.4}$$

Allerdings muß man bei kleinen Änderungen p_1, ρ_1 von einer energiekonstanten (adiabatischen) Zustandsänderung ausgehen. In diesem Fall muß der isotherme Kompressionsmodul in Gleichung (2.4) durch den adiabatischen Kompressionsmodul K_S ersetzt werden. Beide unterscheiden sich durch die Adiabatenkonstante γ, die das Verhältnis von spezifischer Wärme bei konstantem Druck zu spezifischer Wärme bei konstantem Volumen angibt.

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{K_T}{\gamma} p_1 = \rho_0 K_S p_1 \,.$$

Mit obigen Gleichungen läßt sich die Wellengeschwindigkeit als Funktion von Kompressionsmodul und Dichte des Mediums ermitteln. Eine Fluidsäule wird an ihrem linken Ende von einer Kraft $F = p_1 A$ gestaucht. Dabei bewegt sich ein masseloser Kolben mit einer konstanten Geschwindigkeit v_1 nach rechts. Innerhalb der Belastungsdauer t schreitet eine Welle im Fluid um die Länge ct

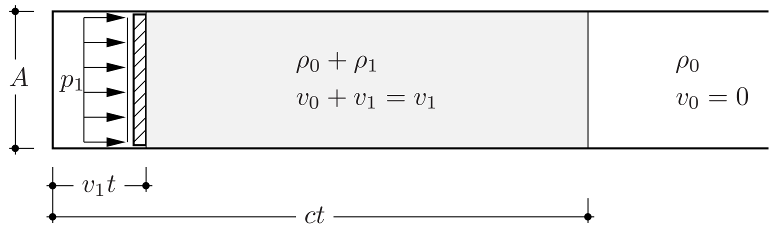


Abbildung 2.1: *Gestauchte Fluidsäule zum Zeitpunkt t*

voran, wobei c die Wellengeschwindigkeit ist. In der Zeit t wird einer Masse $\rho_0 Act$ ein Impuls der Größe $p_1 At = \rho_0 Act \cdot v_1$ aufgeprägt. Außerdem wird die Fluidsäule um die Länge $v_1 t$ gestaucht. Mit dem HOOKEschen Gesetz lassen sich Druckänderung und Stauchung über den Kompressionsmodul in Beziehung bringen: $p_1 K_S = Av_1 t/(Act)$. Wenn man beide Beziehungen ineinander einsetzt, erhält man für die Wellengeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 K_S} = \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

Des weiteren lassen sich die Beziehungen

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = c^2 \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} \tag{2.5}$$

errechnen, die für die Herleitung der Wellengleichung nützlich sind.

2.3 Lineare Wellengleichung

2.3.1 Druckformulierung

Um die Wellengleichung zu erhalten, wird die Zeitableitung der Massenbilanz (2.3) von der Divergenz der Impulsbilanz (2.2) subtrahiert. Nach einigen Umformungen und unter Verwendung der Beziehung (2.5) erhält man:

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \mathrm{div}\boldsymbol{b} - \rho_0 \frac{\partial a_1}{\partial t} = \sigma \tag{2.6}$$

mit dem Laplace-Operator $\nabla^2 = \mathrm{div}\mathbf{grad}$.

2.3.2 Potentialformulierung

Wenn nicht nur der Druck sondern auch das Geschwindigkeitsfeld des Mediums von Interesse ist, ist es sinnvoll, eine andere Form der Wellengleichung zu verwenden. Dafür wird der Gradient der Massenbilanz von der Zeitableitung der Impulsbilanz subtrahiert. Wenn die Volumenkräfte in der Zeit konstant sind, erhält man:

$$\mathbf{grad}\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} = \mathbf{grad}a_1\,.$$

Für ein wirbelfreies Geschwindigkeitsfeld ($\mathbf{rot}\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$) gilt:

$$\mathbf{grad}\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1 = \nabla^2 \boldsymbol{v}_1\,.$$

Um eine skalare Formulierung zu erhalten wird ein Geschwindigkeitspotential ϕ eingeführt:

$$\boldsymbol{v}_1 = -\mathbf{grad}\phi\,.$$

Mit diesen Vereinfachungen lautet die Potentialformulierung schließlich:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -a_1\,. \tag{2.7}$$

Geschwindigkeitsfeld und Druckverteilung können in einer Nachlaufrechnung ermittelt werden.

In den folgenden Abschnitten werden die Indizes “$_1$” der Zustandsgrößen, die deren Abweichungen von ihrem statischen Ruhewert kennzeichnen, zur besseren Lesbarkeit der Formeln weggelassen. Die Größen p, a, etc. bezeichnen von nun an diese Abweichungen.

2.3.3 Die konvektive Wellengleichung

Ein sich im Raum (durch das Medium) bewegendes Schallfeld läßt sich einfacher in einem sich mit der Schallquelle bewegenden Koordinatensystem beschreiben. Besonders dann, wenn alle Ränder und Schallerzeuger sich zu allen Zeitpunkten gleichförmig bewegen, ist die Wahl eines solchen Koordinatensystems vorteilhaft. Wenn man die Massen- und Impulsbilanz für ein "mitschwimmendes" Volumen aufstellt und linearisiert, erhält man:

$$\frac{\mathrm{D}\rho_1}{\mathrm{D}t} + \rho_0 \mathrm{div}\boldsymbol{v}_1 = \rho_0 a_1 \qquad \text{und} \qquad \rho_0 \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_1}{\mathrm{D}t} + \mathbf{grad} p_1 = \boldsymbol{b}\,.$$

Die konvektive Wellengleichung ergibt sich wiederum aus der Subtraktion der substantiellen Zeitableitung der Massenbilanz von der Divergenz der Impulsbilanz zu:

$$\nabla_\xi^2 p(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2} p(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathrm{div}\boldsymbol{b} - \rho_0 \frac{\mathrm{D}a_1}{\mathrm{D}t}\,. \tag{2.8}$$

Analog läßt sich eine entsprechende Geschwindigkeitspotentialformulierung herleiten.

Der Operator $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ setzt sich zusammen aus der lokalen Ableitung in mediumfesten Koordinaten und einem konvektiven Term:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_\xi \boldsymbol{\nabla}_\xi\,. \tag{2.9}$$

In Gleichung (2.9) ist $\boldsymbol{v}_\xi$ die Geschwindigkeit des Fluids, wenn man von einem ortsfesten Koordinatensystem ausgeht. Betrachtet man ein bewegtes Koordinatensystem in einem ruhenden Fluid, gilt Gleichung (2.9) ebenfalls, es ist aber die Geschwindigkeit des Koordinatensystems mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Bei einer reinen Translationsbewegung sind die mediumfesten Koordinaten $\boldsymbol{x}$ mit den körperfesten Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ über die Beziehung

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{\xi}$$

verknüpft. Dabei ist $\boldsymbol{x}_0(t)$ der Punkt $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ im $\boldsymbol{x}$-Koordinatensystem.

2.4 Rand– und Anfangsbedingungen

Zu einer vollständig definierten Problemstellung gehören immer Randbedingungen (örtlich) und Anfangsbedingungen (zeitlich). Diese sorgen dafür, daß eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung existiert.

Es wird angenommen, daß das Fluid zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist. In diesem Fall gelten *homogene* Anfangsbedingungen:

$$p(\boldsymbol{x}, t = 0) = \frac{\partial}{\partial t} p(\boldsymbol{x}, t = 0) = 0 \quad \text{in } \Omega\,.$$

Auf den Rändern, die den Geltungsbereich der Differentialgleichung eingrenzen, muß zusätzlich *eine* Größe bekannt sein, da es sich bei der Wellengleichung um eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung handelt.

Wenn die Zustandsgröße p selbst vorgegeben ist, spricht man von der DIRICHLETschen Randbedingung. Bei Außenraumproblemen der Akustik tritt diese Randbedingung praktisch überhaupt nicht auf. Sie entspricht bei $p = 0$ einer "freien Oberfläche". Einlaufende Druckwellen werden antimetrisch reflektiert, siehe Abbildung 2.2.

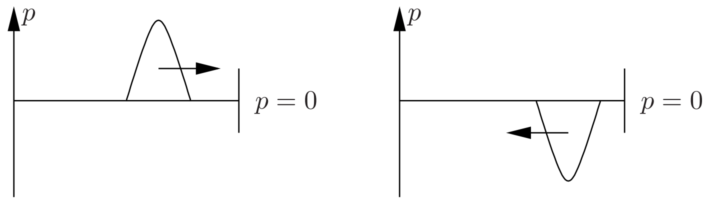


Abbildung 2.2: DIRICHLET*sche Randbedingung*

Bei der sogenannten NEUMANNschen Randbedingung ist die Normalenableitung der Zustandsgröße, der sogenannte Fluß $q = \boldsymbol{n}\mathbf{grad}p$ bekannt. Mit dieser Randbedingung lassen sich schallharte Oberflächen modellieren. Einlaufende Druckwellen werden symmetrisch reflektiert, siehe Abbildung 2.3.

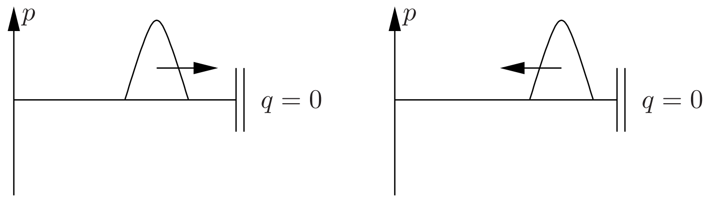


Abbildung 2.3: NEUMANN*sche Randbedingung*

Der Fluß ist proportional zur Normalenbeschleunigung a_n des Randes. Es gilt mit der Impulsbilanz (2.2) unter Abwesenheit von Volumenkräften:

$$\boldsymbol{n}\,\mathbf{grad}p = q = -\rho_0 a_n\,.$$

So läßt sich die Schallerzeugung von vibrierenden Oberflächen darstellen.

Wenn der Rand Schall absorbiert, kann dies mit der ROBINschen Randbedingung modelliert werden. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen dem Fluß in Normalenrichtung und dem Druck her [51]:

$$q = -\frac{1}{c}\frac{1-\alpha_r}{1+\alpha_r}\cdot\dot{p}\,,$$

mit dem Reflektionskoeffizienten α_r, der das Verhältnis von einlaufender zu reflektierter Druckwelle angibt. Ist $\alpha_r = 0$, tritt keinerlei Reflektion auf – einlaufende Wellen werden vollständig absorbiert.

Während die drei obengenannten Randbedingungsarten ein Innenraumproblem vollständig begrenzen, ist beim Außenraumproblem eine zusätzliche Bedingung – die SOMMERFELDsche Abstrahlbedingung – zu erfüllen, um eine Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten. Sie sagt aus, daß Wellen im Unendlichen auslaufen und nicht reflektiert werden.

2.5 Kinematik bewegter Schallquellen

Bevor auf einige einfache Lösungen der Differentialgleichung eingegangen wird, ist es sinnvoll, sich zunächst mit der Kinematik stationärer und bewegter Schallquellen auseinanderzusetzen. Der einfachste Fall ist der einer stationären Punktquelle an der Stelle $\boldsymbol{y}$. Ein Beobachter im Punkt $\boldsymbol{x}$ hört zum Rezeptionszeitpunkt t den Schall, der im Quellpunkt zur Emmissionszeit

$$\tau = t - R/c = t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}$$

abgestrahlt wurde. Im Zeitraum $\Delta t = \tau - t$ legt der Schall gerade die Wegstrecke R zurück, den Abstand zwischen Quelle und Beobachter.

Wenn sich Schallquelle und Beobachter bewegen, sind die Koordinaten $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Funktionen der Zeit, siehe Abbildung 2.4. Die Emissionszeit für einen Beobachter in $\boldsymbol{x}$ ist nun

$$\tau = t - R/c = t - \frac{|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(\tau)|}{c}\,. \tag{2.10}$$

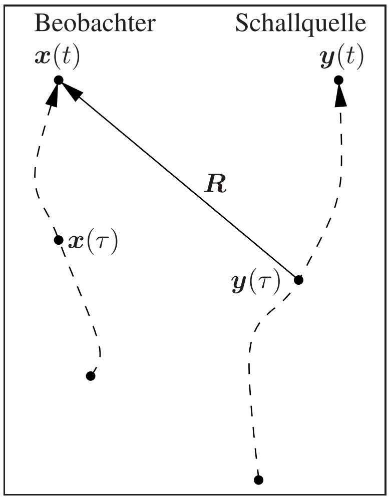


Abbildung 2.4: *Sich bewegende Punktquelle mit sich bewegendem Beobachter*

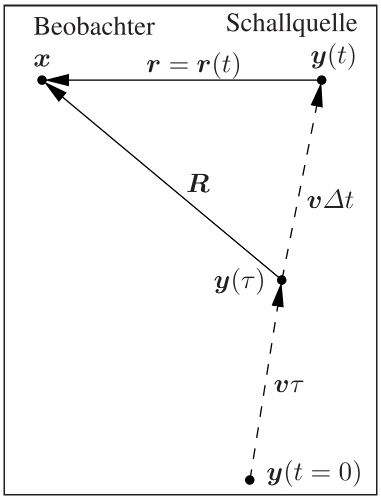


Abbildung 2.5: *Punktquelle mit* $\boldsymbol{v}$*=*$const$*, fester Beobachter*

Eine Berechnung des Schalls, der zu einem bestimmten Zeitpunkt von einem Beobachter empfangen wird, erfordert natürlich die Kenntnis des zurückgelegten Pfads von Beobachter und Schallquelle. Diese Berechnung kann für komplizierte Pfade extrem aufwendig werden. Wenn die Geschwindigkeit der Schallquelle oder des Beobachters größer als die Schallgeschwindigkeit ist, können beliebig viele Emissionszeitpunkte und -orte einer Schallquelle gleichzeitig Einfluß auf einen einzigen Rezeptionsort haben.

Bei den nun folgenden Betrachtungen soll an einem festen Punkt $\boldsymbol{x}$ eine sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig fortbewegende Schallquelle beobachtet werden (Abbildung 2.5). Der Schall, der beim Beobachter eintrifft, legt dabei eine Wegstrecke der Länge R zurück. Er benötigt dafür die Zeit $\Delta t = R/c$. Während der Vorbeifahrt der Schallquelle ändert sich R natürlich mit der Zeit t, die beim Beobachter gemessen wird. Wenn sich die Schallquelle mit Unterschallgeschwindigkeit bewegt, existiert für jeden Beobachtungszeitpunkt t genau ein Emissionszeitpunkt $\tau(t) = t - R/c$.

Wenn sich die Schallquelle zur Zeit $t = 0$ gerade im Ursprung des Koordinatensystems befindet, gilt für den vom Schall zurückgelegten Weg $\boldsymbol{R}$ mit

$\boldsymbol{y}(\tau) = \boldsymbol{v}\tau$:

$$\boldsymbol{R}(\tau) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(\tau)\,,$$

oder in t ausgedrückt:

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}[t - R(t)/c] = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{M}[ct - R(t)] \tag{2.11}$$

mit dem Machvektor $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{v}/c$. Des weiteren gilt:

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{M}R + \boldsymbol{r} \tag{2.12}$$

und

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t\,. \tag{2.13}$$

Der Vektor $\boldsymbol{r}$ ist der zum Beobachtungszeitpunkt t gemessene Abstand zwischen Quelle und Beobachter, siehe Abbildung 2.5.

Einen Ausdruck für den Abstand $R(t)$ – also für die Länge des Vektors $\boldsymbol{R}(t)$ – erhält man, wenn man die rechte und linke Seite von Gleichung (2.11) skalar mit sich selbst multipliziert:

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{M}[ct - R])^2\;.$$

Nach dem Ausmultiplizieren der linken Seite

$$R^2 = x^2 - 2\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}[ct - R] + M^2[ct - R]^2$$

ergibt sich die quadratische Gleichung

$$R^2[1 - M^2] - 2R[\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} - ctM^2] - [x^2 - 2\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}ct + M^2c^2t^2] = 0\,,$$

die nach R aufgelöst werden kann. So erhält man

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} - ctM^2 \pm \sqrt{[x^2 - c^2t^2][1 - M^2] + [\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} - ct]^2}}{1 - M^2} \\ &= \frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} - ctM^2 \pm R_1}{1 - M^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

als Funktion der Beobachterkoordinate $\boldsymbol{x}$, der Geschwindigkeit der Schallquelle $\boldsymbol{M}$, der Schallgeschwindigkeit c und der Beobachtungszeit t. Für Unterschallgeschwindigkeiten ($M < 1$) liefert nur das positive Vorzeichen einen positiven

Wert für R. Wenn Gleichung (2.11) skalar mit dem Machvektor multipliziert und in Gleichung (2.14) eingesetzt wird, erhält man

$$R_1 = R[1 - M_R] \tag{2.15}$$

mit $M_R = \boldsymbol{MR}/R$.

Im Hinblick auf die Entwicklung des numerischen Verfahrens ist insbesondere die Berechnung des Emissionszeitpunkts für gegebene Beobachterkoordinaten $(\boldsymbol{x}, t)$ von Wichtigkeit. Mit diesen Koordinaten und Gleichung (2.13) kann sofort der Vektor $\boldsymbol{r}$ bestimmt werden. Für die Berechnung der Zeitdifferenz zwischen Emission und Empfang des Schallsignals multipliziert man Gleichung (2.12) skalar mit sich selbst, ersetzt R durch $c\Delta t$ und löst nach Δt auf:

$$\Delta t = t - \tau = \frac{r}{c[1 - M^2]} \left[M_r \pm \sqrt{1 - M^2 + M_r^2} \right] \tag{2.16}$$

mit $M_r = \boldsymbol{Mr}/r$, der Komponente des Machvektors in $\boldsymbol{r}$-Richtung. Wiederum liefert bei Unterschallgeschwindigkeit nur das positive Vorzeichen einen positiven Wert für Δt.

Für das Skalarprodukt des Vektors $\boldsymbol{R}$ mit dem Machvektor gilt mit den Gleichungen (2.12) und (2.15) sowie $R = c\Delta t$:

$$\boldsymbol{MR} = M^2 R + \boldsymbol{Mr} = R - R_1 \, .$$

Löst man diese Gleichung nach R auf, erhält man

$$R = \frac{\boldsymbol{Mr} + R_1}{1 - M^2} \, . \tag{2.17}$$

Ein Vergleich der Gleichungen (2.16) und (2.17) liefert einen weiteren Ausdruck für R_1. Es gilt:

$$R_1 = r\sqrt{1 - M^2 + M_r^2} \, .$$

2.6 Lösungen der Differentialgleichung

Um einen ersten Eindruck von den Eigenschaften der Differentialgleichung der linearen Akustik zu bekommen, ist es hilfreich, zunächst einige ihrer einfachen Lösungen im Frequenzbereich zu betrachten. Dabei sind insbesondere die von sich bewegenden Schallquellen hervorgerufenen Effekte von Interesse. Beispielsweise lassen sich sowohl für stationäre als auch für bewegte Punktquellen analytische Lösungen der Wellengleichung herleiten. Eine spezielle Lösung ist die sogenannte *Fundamentallösung* der Differentialgleichung, die wiederum bei der Herleitung der Randintegralgleichung (siehe Kapitel 3) eine wichtige Rolle spielt.

2.6.1 Die Fundamentallösung für stationäre Schallquellen

Eine punktförmige Schallquelle befindet sich im Punkt $\boldsymbol{y}$. Punktförmige Schallquellen kann man sich als sehr kleine pulsierende Kugeln vorstellen. Die Rate, mit der sich ihr Volumen V_{Kugel} ändert, geht ein in die Quellenbelegung a. Für die Punktquelle gilt:

$$a = \frac{\partial V_{\mathrm{Kugel}}}{\partial t}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = Q(t)\,\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3)\,.$$

Unter Abwesenheit von Volumenkräften $\boldsymbol{b}$ ergibt sich das Schallfeld $p(\boldsymbol{x},t)$ aus der Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned}\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \mathrm{div}\boldsymbol{b} - \rho_0\frac{\partial a}{\partial t}\\ &= 0 - \rho_0\frac{\partial Q(t)}{\partial t}\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3)\,.\end{aligned}$$

Die Lösung ist nach [42]

$$p(\boldsymbol{x},t) = c_1\frac{Q'(t-R/c)}{R} + c_2\frac{Q'(t+R/c)}{R} \tag{2.18}$$

mit $Q'(z) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}z)Q(z)$. Der Abstand $R = |\boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ ist der Weg, den der Schall vom Emissionspunkt zum Beobachter zurücklegt. Der erste Summand in Gleichung (2.18) repräsentiert vom Quellpunkt auslaufende Wellen, die in ihrer Stärke mit wachsendem Abstand abklingen. Der zweite Summand beschreibt auf den Quellpunkt zulaufende Wellen, die im Quellpunkt bei verschwindendem R zur Emissionszeit ihre maximale Stärke erreichen.

Die *Fundamentallösung* G der Wellengleichung (2.6) ist die Lösung der Differentialgleichung für einen Impuls zur Emissionszeit τ im Punkt $\boldsymbol{y}$. Da die Fundamentallösung vor dem Emissionszeitpunkt im gesamten Gebiet null ist, liefert nur der erste Summand aus Gleichung (2.18) einen Anteil, der zweite Summand verschwindet. Für die Wellengleichung im Zeitbereich ergibt sich G aus der Beziehung

$$\nabla_y^2 G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\delta(t-\tau)\ .$$

Mit Gleichung (2.18) und $\rho_0(\partial Q/\partial t) = \delta(t-\tau)$ lautet die Fundamentallösung

$$G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = \frac{\delta(t-\tau-R/c)}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi R}\delta(g)\ . \tag{2.19}$$

Sie beschreibt einen Impuls, der sich kugelförmig mit der Wellengeschwindigkeit c um den Emissionspunkt ausbreitet.

Wenn eine harmonische Anregung vorliegt, kann mit einem Produktansatz für die Feldgröße

$$p(\boldsymbol{x}, t) = p(\boldsymbol{x})\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

die Differentialgleichung (2.6) in die HELMHOLTZgleichung transformiert werden:

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{x}) + \frac{\omega^2}{c^2}p(\boldsymbol{x}) = \mathrm{div}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) + \rho_0 \mathrm{i}\omega a(\boldsymbol{x}). \tag{2.20}$$

Die Fundamentallösung ist demnach die Lösung der Gleichung

$$\nabla_y^2 G + \frac{\omega^2}{c^2} G = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ .$$

Man erhält

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega R/c}}{4\pi R}\ . \tag{2.21}$$

2.6.2 Lösungen für bewegte Punktquellen

Eine Punktquelle befindet sich im Punkt $\boldsymbol{y}$ und erzeugt Schall gemäß einer zeitabhängigen Intensitätsfunktion $Q(t)$. Sie bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Die Schalldruckverteilung läßt sich nun nicht mehr so einfach mit der Druckformulierung der Wellengleichung wie bei einer stationären Punktquelle berechnen, da jetzt auch der Ort der Punktquelle zeitabhängig ist. Die Zeitableitung des Quellterms in der Druckformulierung bewirkt eine komplizierte rechte

Seite. Deshalb wird zunächst das Geschwindigkeitspotential berechnet, da hier die Quellenbelegung der rechten Seite nicht nach der Zeit differenziert wird.

Die Potentialformulierung für dieses Problem lautet:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -Q(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(t)) \ .$$

Unter Anwendung einer LORENTZ-Transformation ist nach [42] das Geschwindigkeitspotentialfeld für eine Unterschallgeschwindigkeit ($M < 1$)

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{Q(t - R/c)}{4\pi\, R[1 - M_R]} = \frac{Q(t - R/c)}{4\pi\, R_1} \tag{2.22}$$

Der Abstand $R = c\Delta t$ mit Δt aus Gleichung (2.16) ist die Strecke, die der Schall vom Emissionsort $\boldsymbol{y}(\tau)$ zum Beobachtungspunkt $\boldsymbol{x}(t)$ zurücklegt.

Mit Gleichung (2.22) läßt sich sofort die Fundamentallösung für die Wellengleichung im mitbewegten Koordinatensystem schreiben. Wenn $Q(t) = \delta(t-\tau)$, ist

$$G_B(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - R/c)}{4\pi\, R[1 - M_R]} \ . \tag{2.23}$$

Bei $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ geht G_B über in die Fundamentallösung für stationäre Ränder (2.19). Die zugehörige Schalldruckverteilung ist mit

$$\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{M_R}{1 - M_R} \ , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial R_1}{\partial t} = \frac{M^2 - M_R}{1 - M_R}$$

sowie Gleichung (2.14) und $p = \partial\phi/\partial t$

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \frac{Q'(t - R/c)}{4\pi\, R[1 - M_R]^2} + \frac{Q(t - R/c)[M_R - M^2]c}{4\pi\, R^2[1 - M_R]^3} \ . \tag{2.24}$$

Demnach beschreibt die Fundamentallösung (2.23) das Geschwindigkeitspotentialfeld infolge einer punktförmigen Schallquelle, die sich mit Unterschallgeschwindigkeit bewegt. Die *Schalldruck*verteilung enthält andere Terme: einen Term der Ordnung $1/R^2$, der im Fernfeld ohne Bedeutung ist, und einen Term der Ordnung $1/R$, der sich von der Fundamentallösung um den Faktor $(1 - M_R)^{-1}$ und die Ableitung der Quellfunktion Q unterscheidet.

Die Fundamentallösung weist drei grundlegende Eigenschaften auf [2]:

Kausalität $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = 0$ für $t - \tau < r/c$

Ein Signal kann erst dann Auswirkungen auf einen Beobachter im Abstand R von der Schallquelle haben, wenn die Zeit $\Delta t = R/c$ nach der Emission verstrichen ist. Dies hat zur Folge, daß der zweite Summand in Gleichung (2.18) verschwindet.

Translation $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = G(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}_0, t + t_1; \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}_0, \tau + t_1)$

Das Schallfeld hängt nicht von absoluten Koordinaten ab, sondern von Zeit*differenzen* und *Abständen* zwischen Emission und Beobachtung von Schall. Die Orte von Schallquelle und Beobachter dürfen dann natürlich auch nicht von einer absoluten Zeit abhängen. $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t + t_1)$, $\boldsymbol{y}(\tau) = \boldsymbol{y}(\tau + t_1)$.

Reziprozität $G(\boldsymbol{x}(t), t; \boldsymbol{y}(\tau), \tau) = G(\boldsymbol{y}(-\tau), -\tau; \boldsymbol{x}(-t), -t)$

Man darf Orts- und Zeitkoordinaten von Beobachter und Quelle vertauschen, wenn man das Vorzeichen des Zeitparameters umdreht.

Bei stationären Schallquellen gilt für die Fundamentallösung sogar noch eine weitergehende Eigenschaft: Wenn man die Orte von Beobachter und Schallquelle vertauscht, bleibt der Schall unverändert, der beim Beobachter empfangen wird: $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = G(\boldsymbol{y}, t; \boldsymbol{x}, \tau)$. Dies gilt bei sich bewegenden Schallquellen nicht mehr. Selbst wenn sich Beobachter und Schallquelle mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit ungleich null bewegen, verändert sich der beim Beobachter empfangene Schall. Nur wenn die Bewegungsrichtung senkrecht zum Abstand zwischen beiden Punkten verläuft und geradlinige Bewegung vorliegt, bleibt der beim Beobachter empfangene Schall nach dem Vertauschen unverändert.

2.7 Eigenschaften der Lösungen für Punktquellen

Gewisse Effekte sich bewegender Schallquellen lassen sich am besten an Beispielen im Frequenzbereich verdeutlichen. Der Dopplereffekt etwa ist ein Phänomen, das nur bei schwingungsmäßiger Schallabstrahlung (im Gegensatz zu einem einzigen Schallimpuls) auftritt: das Schallfeld sich bewegender Schallquellen wechselt beim Vorbeifahren von höherer auf niedrigere Frequenz. Ein ähnlicher Effekt tritt bei einem sich bewegenden Beobachter auf.

Während die Frequenz einer Schwingung üblicherweise konstant ist, soll hier die Frequenz, die bei unterschiedlicher Bewegung von Schallquelle und Beobachter zeit- und ortsabhängig ist, verallgemeinernd als Zeitableitung der Phase

Ψ definiert sein. Beispielsweise gilt mit Gleichung (2.22) für das Geschwindigkeitspotentialfeld einer Punktquelle, die Schall der Frequenz ω abstrahlt:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\sin[\omega(t - R(t)/c)]}{4\pi\, R_1} = \frac{\sin \Psi}{4\pi\, R_1}\,.$$

Da der Abstand R eine Funktion der Zeit ist – wie Gleichung (2.14) gezeigt hat –, ergibt sich die beim Beobachter empfangene Frequenz ω^* ebenfalls als Funktion der Zeit:

$$\omega^*(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega \left(1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)\,.$$

Dies zeigt das nun folgende Beispiel, in dem sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $v = 1$ entlang der x-Achse bewegt. Ein zweiter Punkt befindet sich bei $x = 20$ in einem Abstand von 1.2 Einheiten neben der x-Achse (siehe Skizze in Abbildung 2.6). Die Schallgeschwindigkeit des Mediums sei $c = 2$. Im ersten Beispiel ist der bewegte Punkt die Schallquelle und der stationäre Punkt der Beobachter, im zweiten Beispiel werden Beobachter und Schallquelle vertauscht. Die Intensität der Schallquelle ist eine Funktion der Zeit:

$$Q(t) = \sin(\pi t) \qquad \text{für} \quad t > 0\,.$$

Im Fall der sich bewegenden Schallquelle sind die beim Beobachter auftretenden Frequenzen insgesamt höher als beim sich bewegenden Beobachter. Eine Reaktion beim Beobachter tritt hier später ein, da der Schall, der zuerst beim Beobachter eintrifft den gesamten Weg zwischen $P_1(t = 0)$ und P_2 zurücklegen muß.

Im Fall des fahrenden Beobachters trifft die erste Schallwelle zur Zeit $\hat{t}$ ein. Zu dieser Zeit ist er aber der Schallquelle schon ein wenig näher gekommen, so daß der Weg, den dieser Schall zum Beobachter zurücklegen muß, kleiner ist. In beiden Fällen ist zu beachten, daß die Einhüllende der *Potential*funktion bezüglich der y-Achse symmetrisch ist. Dies bedeutet aber nicht, daß es vor und hinter der Schallquelle gleich laut ist, da der Schalldruck ja die Ableitung des Potentials ist.

Abbildung 2.7 zeigt die Schalldruckverteilung entlang der x-Achse zum Zeitpunkt $t = 20$ für eine Schallquelle $\boldsymbol{y}$ mit einer Erregungsfunktion $Q(t) = \sin(\pi t)$. Die Phase des Potentials wurde um $180°$ verschoben. Außerdem wurden Potential und Schalldruck entsprechend skaliert, um die Kurven besser vergleichen zu können. Während bei der stationären Schallquelle die Kurven bis

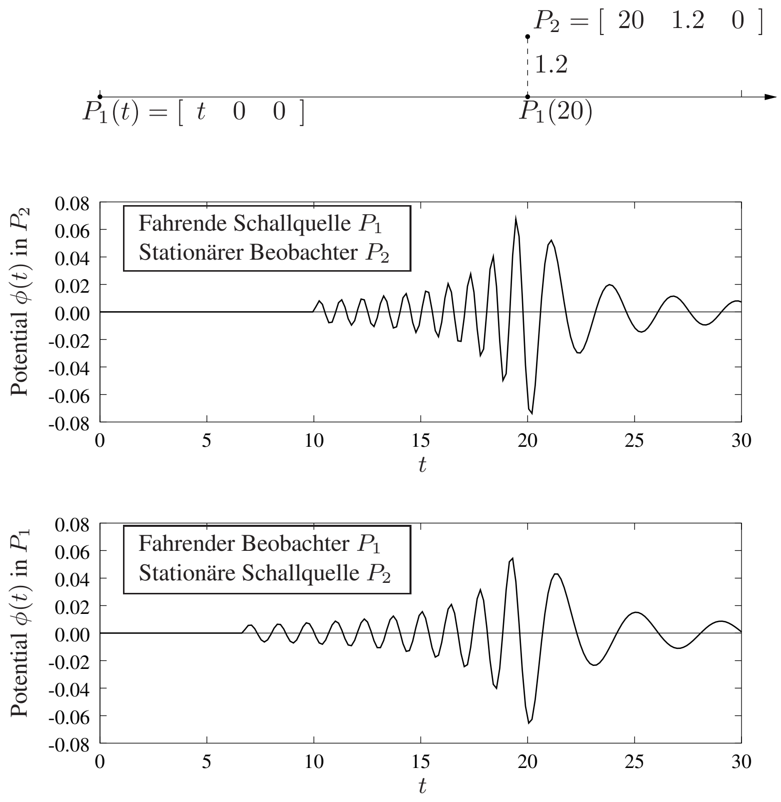


Abbildung 2.6: *Zeitverlauf des Geschwindigkeitspotentials: Einfluß der Bewegung von Schallquelle bzw. Beobachter auf den Frequenzgehalt*

auf diese Phasenverschiebung identisch sind, erkennt man einen deutlichen Unterschied bei einer Bewegung der Schallquelle (siehe Gleichungen (2.22) und (2.24)).

Im Falle der sich bewegenden Schallquelle ist deutlich zu erkennen, daß die Einhüllende des *Schalldrucks* einer punktförmigen Schallquelle nicht mehr symmetrisch zur y-Achse ist. Das bedeutet, daß es in Bewegungsrichtung *vor* der

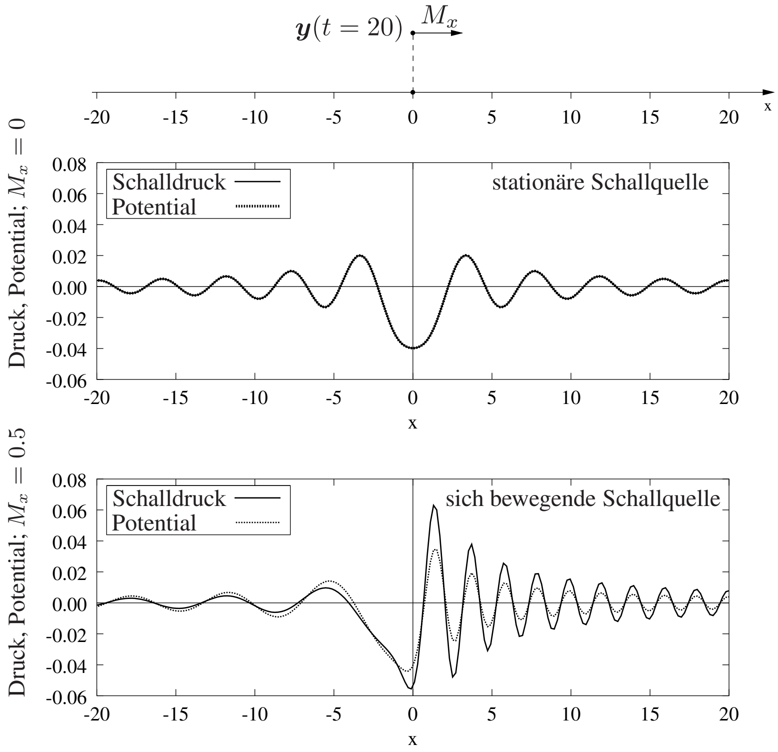


Abbildung 2.7: *Ortsabhängigkeit des Schalldrucks bzw. des Geschwindigkeitspotentials bei stationärer bzw. bewegter Schallquelle*

Schallquelle lauter ist als hinter ihr, und zwar um einen Faktor

$$\frac{1+M^2}{1-M^2},$$

wie sich aus der Gleichung für den Schalldruck (2.24) ergibt.

2.8 Schallreflektion an einer Halbraumebene

An einer ebenen Oberfläche wird der Schall je nach Beschaffenheit der Oberfläche reflektiert, siehe Abbildung 2.8. Die einfachsten Fälle sind symmetrische

Reflektion für schallharte Oberflächen ($q = 0$) und antimetrische Reflektion für freie Oberflächen ($p = 0$).

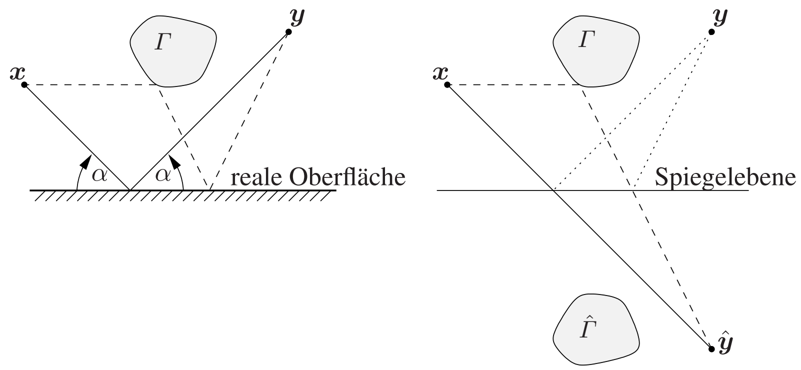


Abbildung 2.8: *Fundamentallösung für den Halbraum: Ersetzen der Halbraumoberfläche durch eine Spiegelebene*

Die Bedingung $q = 0$ ist immer auf Symmetrieebenen des Schallfelds erfüllt. So kann man durch Spiegelung der Schallquellen und der schallreflektierenden Ränder an der Halbraumebene ein symmetrisches Schallfeld erzeugen. Eine Fundamentallösung, die die Bedingung $q = 0$ in einer Ebene erfüllt ergibt sich damit aus der Addition zweier Vollraum-Fundamentallösungen [2]:

$$G_H(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) + G(\boldsymbol{x}, t; \hat{\boldsymbol{y}}, \tau) \ .$$

Ist an der Halbraumebene die Bedingung $p = 0$ zu erfüllen, wird die antimetrische Reflektion durch ein antimetrisch gespiegeltes Schallfeld dargestellt. Wie man sofort sieht, ist die Bedingung $p = 0$ für einen Beobachter $\boldsymbol{x}$ in der Halbraumebene mit der Fundamentallösung

$$G_H(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) - G(\boldsymbol{x}, t; \hat{\boldsymbol{y}}, \tau)$$

erfüllt. Die zu diskretisierenden Oberflächen bleiben mit der Anwendung der Fundamentallösungen für den Halbraum beschränkt auf die unmittelbare Umgebung des zu untersuchenden Problems. Die unendliche Halbraumebene braucht nicht diskretisiert zu werden, was sich deutlich im numerischen Aufwand widerspiegelt.

3 Randintegralgleichung

Die *Differential*gleichung der linearen Akustik läßt sich nur für einige Spezialfälle exakt lösen, weil mit der später erfolgenden Diskretisierung des Problems die exakte Lösung nur in Ausnahmefällen von den gewählten Ansätzen darstellbar ist. Darüberhinaus treten bei einem numerischen Verfahren Integrationsfehler auf. Ausgangspunkt für eine Näherungslösung ist eine äquivalente *Integral*gleichung.

Als Ausgangsgleichung liegt die Wellengleichung in ihren beiden Formulierungen – Gleichung (2.6) und (2.8) – vor. Außerdem braucht man zur Herleitung der Randintegralgleichung die Fundamentallösung, die ebenfalls für beide Formulierungen vorliegt. An dieser Stelle wird für die Herleitung der sogenannten *allgemeinen* KIRCHHOFFschen Integralgleichung für sich bewegende Oberflächen die *konvektive* Formulierung der Wellengleichung verwendet.

Der Unterschied zur Herleitung der KIRCHHOFFschen Integralgleichung für stationäre Ränder liegt im konvektiven Effekt, der bei bewegten Rändern auftritt. Dieser konvektive Effekt kann auf verschiedene Arten berücksichtigt werden. Man kann entweder von der konvektiven Wellengleichung ausgehen, dann benötigt man eine Fundamentallösung für diese Gleichung, die den konvektiven Effekt enthält. Dieser Weg wurde von MORINO/GENNARETTI in [22] beschritten. Dort ist auch die Fundamentallösung für die konvektive Wellengleichung angegeben. Die Oberflächen sind bezüglich des verwendeten Koordinatensystems *stationär*, was die Durchführung der Integrationen über diese Oberflächen vereinfacht.

Die andere Möglichkeit ist die Verwendung der normalen Wellengleichung für mediumfeste Koordinaten. Der konvektive Effekt ist dann in den Randbedingungen enthalten. Diese sind auf Oberflächen gegeben, die sich bezüglich des Koordinatensystems bewegen. FARASSAT/MYERS benutzen eine solche Formulierung für die Herleitung ihrer Randintegralgleichung [18]. Sie machen dabei Gebrauch von der Distributionstheorie. Die Herleitung der Randintegralgleichung ist in diesem Fall etwas komplizierter, so daß in diesem Abschnitt nur die Herleitung über die konvektive Formulierung besprochen wird. Die Formulierung von FARASSAT/MYERS findet sich im Anhang C. In Abschnitt 3.2 wird kurz erläutert, wie sich beide Formulierungen ineinander überführen lassen.

3.1 Ansatz von Morino/Gennaretti

Die Wellengleichung lautet in ihrer konvektiven Formulierung mit dem Schalldruck als Feldgröße

$$\nabla_\xi^2 p(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2} p(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathrm{div}\boldsymbol{b} - \rho_0 \frac{\mathrm{D}a_1}{\mathrm{D}t} = \sigma(\boldsymbol{\xi}, t) \tag{3.1}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{v}_\xi \boldsymbol{\nabla} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{v}_\xi = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t)\,.$$

Die konvektive Ableitung besteht aus der lokalen Ableitung und einem konvektiven Term. Der konvektive Term ist vom Vorzeichen her negativ, da für $\boldsymbol{v}_\xi$ die Geschwindigkeit des mitbewegten $\boldsymbol{\xi}$-Koordinatensystems eingesetzt werden soll; diese Geschwindigkeit ist gerade entgegengesetzt der Geschwindigkeit der Fluidteilchen in Bezug auf das durch das Medium bewegte Koordinatensystem.

Die Fundamentallösung $G(\boldsymbol{\xi}, t; \boldsymbol{\eta}, \tau)$ für diese Wellengleichung muß die Differentialgleichung

$$\nabla_\xi^2 G - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2} G = -\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})\delta(t - \tau) \tag{3.2}$$

erfüllen und lautet für beliebige Bewegung mit Unterschallgeschwindigkeit

$$G(\boldsymbol{\xi}, t; \boldsymbol{\eta}, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - R/c)}{4\pi[R - \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_\eta/c]}\,. \tag{3.3}$$

Die Koordinaten $(\boldsymbol{\xi}, t)$ und $(\boldsymbol{\eta}, \tau)$ bezeichnen dabei den Beobachtungs- beziehungsweise den Quellpunkt im Koordinatensystem der bewegten Punktquelle. R ist allerdings der Abstand zwischen Beobachter und Quelle in *mediumfesten* Koordinaten, also der Weg, den der Schall im Medium Luft zurücklegt (siehe Kapitel 2.5).

Die Fundamentallösung (3.3) geht für geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit über in Gleichung (2.23) [22]:

$$G(\boldsymbol{\xi}, t; \boldsymbol{\eta}, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - R/c)}{4\pi\, r\sqrt{1 - M^2 + M_r^2}} = \frac{\delta(g)}{4\pi\, R_1} \tag{3.4}$$

mit dem Abstand $r = |\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)|$ im Koordinatensystem der bewegten Punktquelle.

Da die Differentialgleichung von einer Näherungsfunktion für p im allgemeinen nicht exakt erfüllt werden kann, verbleibt bei einer diskretisierten Formulierung in jedem Punkt des Gebiets ein Fehler (Residuum) ungleich null. Bei der Methode der gewichteten Residuen wird gefordert, daß das mit einer Wichtungsfunktion Ψ multiplizierte und über das Gebiet Ω und den Zeitraum T integrierte Residuum null wird.

$$\int\limits_T\int\limits_\Omega \left[\nabla_\eta^2 p(\boldsymbol{\eta},\tau) - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}\tau^2}p(\boldsymbol{\eta},\tau)\right]\Psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau = \int\limits_T\int\limits_\Omega \sigma(\boldsymbol{\xi},t)\Psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau\,. \quad (3.5)$$

Wählt man für die Wichtungsfunktion Ψ gerade die Fundamentallösung G der Differentialgleichung, führt dies auf die Randelementmethode. Zunächst werden die Operatoren von der Feldgröße p auf die Fundamentallösung übertragen. Es gilt:

$$G\nabla^2 p = \boldsymbol{\nabla}(G\boldsymbol{\nabla}p) - \boldsymbol{\nabla}(p\boldsymbol{\nabla}G) + p\nabla^2 G$$

$$G\frac{\mathrm{D}^2 p}{\mathrm{D}\tau^2} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(G\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau}\right) - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(p\frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}\tau}\right) + p\frac{\mathrm{D}^2 G}{\mathrm{D}\tau^2}\,.$$

Nach Einsetzen in Gleichung (3.5) und mit

$$\begin{aligned}\int\limits_T\int\limits_\Omega &\left[\nabla^2 G - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2 G}{\mathrm{D}\tau^2}\right]p(\boldsymbol{\eta},\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau \\ &= -\int\limits_T\int\limits_\Omega \delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\delta(t-\tau)p(\boldsymbol{\eta},\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau = -p(\boldsymbol{\xi},t)\end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}-p(\boldsymbol{\xi},t) = &-\int\limits_T\int\limits_\Omega \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(p\frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}\tau} - G\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int\limits_T\int\limits_\Omega \boldsymbol{\nabla}_\eta(p\boldsymbol{\nabla}_\eta G - G\boldsymbol{\nabla}_\eta p)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau + \int\limits_T\int\limits_\Omega G\sigma\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned} \quad (3.6)$$

Die auf den Klammerausdruck wirkende konvektive Ableitung wird in ihre beiden Anteile aufgespalten, so daß für den einen Anteil die Zeitintegration durchgeführt werden kann. Es verbleibt ein Gebietsintegral, das in den Zeitpunkten

$\tau = 0$ und $\tau = t$ ausgewertet werden muß. Das zweite Integral in Gleichung (3.6) kann mit dem Satz von GAUSS in ein Randintegral überführt werden:

$$\begin{aligned} -p(\boldsymbol{\xi}, t) = \quad & - \left[\int\limits_{\Omega} \frac{1}{c^2} \left(p \frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}\tau} - G \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \right]_0^t \\ & + \int\limits_T \int\limits_{\Omega} \frac{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\nabla}_\eta}{c^2} \left(p \frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}\tau} - G \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \mathrm{d}\tau \\ & + \int\limits_T \int\limits_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n_\eta} - G \frac{\partial p}{\partial n_\eta} \, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \mathrm{d}\tau + \int\limits_T \int\limits_{\Omega} G \sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.7}$$

mit $\partial / \partial n_\eta = \boldsymbol{n} \boldsymbol{\nabla}_\eta$. Das erste Integral in dieser Gleichung verschwindet im Zeitpunkt $\tau = 0$, weil homogene Anfangsbedingungen angenommmen werden, und zum Zeitpunkt $\tau = t$ aufgrund der Kausalitätsbedingung: die Zeitdifferenz Δt zwischen Emissions- und Beobachtungszeitpunkt ist null. Das zweite Integral in Gleichung (3.7) kann wiederum in ein Randintegral überführt werden, so daß gilt:

$$\begin{aligned} -p(\boldsymbol{\xi}, t) = \quad & \int\limits_T \int\limits_{\Gamma} \frac{M_n}{c} \left(p \frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}\tau} - G \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau} \right) \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \mathrm{d}\tau \\ & + \int\limits_T \int\limits_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n_\eta} - G \frac{\partial p}{\partial n_\eta} \, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \mathrm{d}\tau + \int\limits_T \int\limits_{\Omega} G \sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.8}$$

mit $M_n = \boldsymbol{v}_\eta \boldsymbol{n} / c$. Lokale und konvektive Ableitung werden zu

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{n}} = \frac{\partial}{\partial n_\eta} - M_n \boldsymbol{M} \boldsymbol{\nabla}_\eta$$

zusammengefaßt. Damit lautet die Integralgleichung

$$\begin{aligned} -p(\boldsymbol{\xi}, t) = \quad & \int\limits_T \int\limits_{\Gamma} p \left(\frac{\partial G}{\partial \tilde{n}} + \frac{M_n}{c} \frac{\partial G}{\partial \tau} \right) - G \left(\frac{\partial p}{\partial \tilde{n}} + \frac{M_n}{c} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \mathrm{d}\tau \\ & + \int\limits_T \int\limits_{\Omega} G \sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \mathrm{d}\tau \,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

In der ersten Klammer muß die Fundamentallösung nach der Produktregel differenziert werden. Es gilt für eine Bewegung mit konstanter Unterschallgeschwindigkeit:

$$\nabla_\eta r = -\boldsymbol{r}\,, \quad \nabla_\eta(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{M}\,,$$

$$\nabla_\eta R_1 = -\frac{\left[\boldsymbol{r}(1-M^2) + \boldsymbol{M}\cdot(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r})\right]}{R_1}$$

$$\nabla_\eta R = -\frac{\boldsymbol{r}(1-M^2) + \boldsymbol{M}\left[R_1 + (\boldsymbol{M}\boldsymbol{r})\right]}{R_1(1-M^2)}\,,$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{n}}\frac{1}{R_1} = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}(1-M^2)}{{R_1}^3} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial R}{\partial\tilde{n}} = -M_n - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{R_1}\,.$$

Die Ortsableitung der DIRAC-Distribution wird in eine Zeitableitung umgewandelt:

$$\begin{aligned}\nabla_\eta\delta(t-\tau-R/c) &= \frac{\partial}{\partial R}\delta(t-\tau-R/c)\nabla_\eta R\\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t-\tau-R/c)\nabla_\eta R\,.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{\partial G}{\partial\tilde{n}} = \frac{\partial}{\partial\tilde{n}}\left(\frac{\delta(g)}{4\pi R_1}\right) = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}(1-M^2)}{{R_1}^3}\delta(g) - \frac{M_nR_1 + \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{cR_1}\frac{\partial\delta(g)}{\partial\tau}\,.$$

Jetzt kann für den ersten Summanden des Randintegrals in Gleichung (3.9) eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
-4\pi p(\boldsymbol{\xi},t) = & \int\limits_T\int\limits_\Gamma p\left[\frac{\boldsymbol{rn}(1-M^2)}{{R_1}^3}+\frac{M_n}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{R_1}\right]\delta(g)\,\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}\mathrm{d}\tau \\
& -\int\limits_T\int\limits_\Gamma p\left[\frac{\boldsymbol{rn}}{c{R_1}^2}\right]\frac{\partial\delta(g)}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}\mathrm{d}\tau \\
& -\int\limits_T\int\limits_\Gamma \frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial p}{\partial n_\eta}-M_n\boldsymbol{M}\boldsymbol{\nabla}_\eta p+\frac{M_n}{c}\frac{\partial p}{\partial\tau}\right]\delta(g)\,\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}\mathrm{d}\tau \\
& +\int\limits_T\int\limits_\Omega \frac{\sigma}{R_1}\delta(g)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Nachdem die Zeitableitung im zweiten Integral von der DIRAC-Distribution auf den anderen Teil des Integranden “übergewälzt” wird, können alle Zeitintegrale in Gleichung (3.10) aufgrund der Eigenschaft der DIRAC-Distribution ausgewertet werden. Da nur geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit des Rands und damit des Koordinatensystems betrachtet wird, verschwinden alle Zeitableitungen der nur von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{M}$ abhängigen Größen:

$$
\begin{aligned}
-4\pi p(\boldsymbol{\xi},t) = & \int\limits_\Gamma \left\{p\left[\frac{\boldsymbol{rn}(1-M^2)}{{R_1}^3}\right]\right\}_{\tau^*}\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\
& +\int\limits_\Gamma \left\{\frac{\partial p}{\partial\tau}\left[\frac{\boldsymbol{rn}-M_nR_1}{c{R_1}^2}\right]\right\}_{\tau^*}\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\
& -\int\limits_\Gamma \left\{\left[\frac{\partial p}{\partial n_\eta}-M_n\boldsymbol{M}\boldsymbol{\nabla}_\eta p\right]\frac{1}{R_1}\right\}_{\tau^*}\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\
& +\int\limits_\Omega \left\{\frac{\sigma}{R_1}\right\}_{\tau^*}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Die geschweiften Klammern sind für die Emissionszeit $\tau^*(\xi,\eta,t)=t-R/c$ auszuwerten. Hier wird das Argument der DIRAC-Distribution null. Das Skalarprodukt des Machvektors mit dem Gradienten des Schalldrucks im dritten Integral wird transformiert

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\nabla}_\eta p = M_n \frac{\partial p}{\partial n_\eta} + \boldsymbol{M}_t \boldsymbol{\nabla}_2 p \,,$$

wobei $\boldsymbol{M}_t$ der Anteil des Machvektors ist, der tangential zur Oberfläche $\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$ verläuft. $\boldsymbol{\nabla}_2$ ist der Oberflächengradient des Schalldrucks. Damit läßt sich die Integralgleichung im bewegten Koordinatensystem so schreiben, daß sie für das numerische Verfahren verwendet werden kann:

$$\begin{aligned} 4\pi p(\boldsymbol{\xi}, t) = \; & \int\limits_\Gamma \left\{ -p \frac{\boldsymbol{rn}(1-M^2)}{{R_1}^3} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\ & + \int\limits_\Gamma \left\{ \frac{\partial p}{\partial n_\eta} \frac{1-M_n^2}{R_1} - \boldsymbol{\nabla}_2 p \frac{\boldsymbol{M}_t M_n}{R_1} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\ & + \int\limits_\Gamma \left\{ \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{R_1 M_n - \boldsymbol{rn}}{c{R_1}^2} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} - \int\limits_\Omega \left\{ \frac{\sigma}{R_1} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Setzt man in Gleichung (3.12) die Geschwindigkeit des Rands gleich null, also gilt

$$M = M_n = 0 \,, \quad \boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{0} \,, \quad R_1 = R = r \,,$$

erhält man die KIRCHHOFFsche Interalgleichung für stationäre Ränder, wie sie bereits 1882 veröffentlicht wurde.

3.2 Beziehung zur Formulierung nach Farassat/Myers

Der Ansatz von FARASSAT / MYERS unterscheidet sich vom Ansatz MORINO / GENNARETTI nur durch die Wahl des Koordinatensystems. Der Vollständigkeit halber ist die Herleitung der Integralgleichung in mediumfesten Koordinaten im Anhang C dargestellt. Die Gleichungen (3.12) und (C.11) lassen sich mit

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}R + \boldsymbol{r} \quad \text{und damit} \quad R(\boldsymbol{Rn} - M_n) = \boldsymbol{rn}$$

leicht ineinander überführen.

4 Randelementmethode

Die im vorigen Kapitel hergeleitete Randintegralgleichung liefert den Schalldruck p in einem Punkt $\boldsymbol{\xi}$, der sich *im Gebiet* Ω befindet, wobei für die Berechnung des Schalldrucks *alle* Randwerte – der Druck p *und* der Fluß q – bekannt sein müssen. MORINO und FARASSAT sprechen auch von einer "integral representation" des Differentialoperators nebst Randbedingungen. Benötigt wird jedoch eine "integral equation", mit der sich die unbekannten Randwerte berechnen lassen.

Zu diesem Zweck wird der Beobachtungspunkt $\boldsymbol{\xi}$ – auch Kollokationspunkt genannt – auf den Rand gelegt. In der Integralgleichung (3.12) tritt nun neben dem unbekannten Randwert (normalerweise p) auch eine bekannte Randbedingung (normalerweise q) auf. Im Zuge einer Diskretisierung des Rands mit n Knotenpunkten – und somit n unbekannten und n bekannten Randwerten – liefert die Kollokation in allen n Knoten gerade n Gleichungen.

In diesem Kapitel wird das Schallfeld *eines* bewegten Rands betrachtet. Der Kollokationspunkt und die bewegte Oberfläche, über die integriert wird, bewegen sich mit der gleichen konstanten Unterschallgeschwindigkeit. Deshalb ist es für die Betrachtungen in diesem Abschnitt sinnvoll, als Ausgangsgleichung die im vorangegangenen Abschnitt hergeleitete Randintegralgleichung für mitbewegte Koordinaten zu verwenden.

4.1 Singuläre Integrale

Liegt der Kollokationspunkt $\boldsymbol{\xi}$ auf der Oberfläche $\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$, über die integriert wird, werden die Randintegrale in Gleichung (3.12) singulär, weil der Faktor $1/r$ – der in allen Integralen auftritt – für $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\xi}$ gegen unendlich strebt.

Alle Randintegrale in Gleichung (3.12) lassen sich wie folgt darstellen:

$$\int\limits_{\Gamma} \mu \, k \, r^{-n} \, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \, .$$

μ steht für die Feldgröße p oder ihre Ableitungen $\dot{p}$ und q, während k ein vom

Betrag des Vektors $\boldsymbol{r}$ unabhängiger Faktor ist. Um ein solches singuläres Integral auszuwerten, integriert man in der unmittelbaren Umgebung des Kollokationspunkts $\boldsymbol{\xi}$ nicht über den wirklichen Rand, sondern über eine Kugelschale mit dem Radius ϵ und $\boldsymbol{\xi}$ als ihrem Mittelpunkt. Anschließend wird der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ durchgeführt. Die Geometrie in der Nähe eines Kollokationspunkts ist Abbildung 4.1 dargestellt.

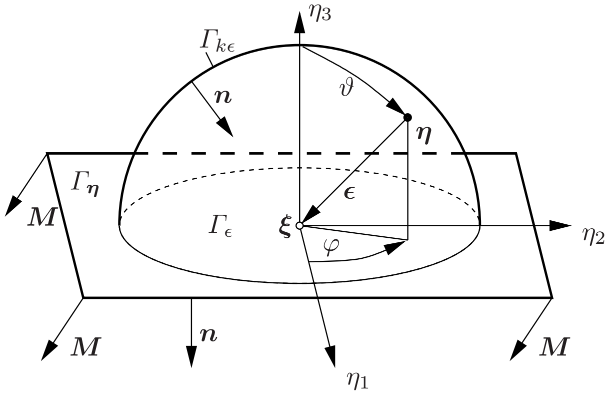


Abbildung 4.1: *Geometrie einer ϵ-Umgebung um den Kollokationspunkt $\xi \in \Gamma$*

Ein singuläres Randintegral ist wie folgt auszuwerten:

$$\int\limits_{\Gamma} \mu\, k\, r^{-n}\, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_\epsilon} \mu\, k\, r^{-n}\, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} + \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_{k\epsilon}} \mu\, k\, r^{-n}\, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}\,. \tag{4.1}$$

Bei stationären Oberflächen in der Akustik läßt sich das zweite Integral in dieser Gleichung für beliebige Eckgeometrien analytisch lösen, weshalb sich für dieses Integral auch der Ausdruck “integralfreier Term” eingebürgert hat. Bei bewegten Rändern ist das nicht mehr der Fall, trotzdem soll diese Bezeichnung hier verwendet werden.

Integrale über $\Gamma \setminus \Gamma_\epsilon$

Wie TRÖNDLE in [51] anmerkt, sind Integrale der Form

$$\int \frac{\mu k}{r} \mathrm{d}\Gamma \qquad \text{und} \qquad \int \frac{\mu k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma$$

uneigentlich integrierbar, wenn der Rand Γ HÖLDER-stetig differenzierbar und seine Belegung beschränkt ist. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *schwacher* Singularität der Integralkerne (siehe auch [25]). Da diese Voraussetzungen hier gegeben sind, lassen sich die Integrale über $\Gamma \setminus \Gamma_\epsilon$ recht einfach auswerten. Näheres enthält Abschnitt 4.4.

Integralfreier Term

Um den integralfreien Term zu berechnen, ist eine Transformation in Kugelkoordinaten sinnvoll:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_{k\epsilon}} \mu\; k\; r^{-n}\;\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int\limits_{\vartheta_0(\varphi)}^{\vartheta_1(\varphi)} \mu(\boldsymbol{\eta})\; k\;\epsilon^{-n}\;\sin\vartheta\epsilon^2\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

Das transformierte Integral wird in zwei Teile aufgespalten:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_{k\epsilon}} \mu\; k\; r^{-n}\;\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} = \quad \mu(\boldsymbol{\xi})\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int\limits_{\vartheta_0(\varphi)}^{\vartheta_1(\varphi)} k\sin\vartheta\;\epsilon^{2-n}\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}_{d(\boldsymbol{\xi})}$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int\limits_{\vartheta_0(\varphi)}^{\vartheta_1(\varphi)} \left(\mu(\boldsymbol{\eta})-\mu(\boldsymbol{\xi})\right)\; k\sin\vartheta\;\epsilon^{2-n}\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\,. \tag{4.2}$$

Aus obiger Beziehung wird klar, unter welchen Bedingungen der integralfreie Term begrenzt bleibt. Unter der Voraussetzung einer HÖLDER-stetigen Belegung μ, das heißt

$$|\mu(\boldsymbol{\eta})-\mu(\boldsymbol{\xi})| \le c_1\epsilon^{\alpha} \quad \text{mit } \alpha > 0 \quad \text{und } c_1 = const\,,$$

verschwinden bei einem Exponenten $n = 1$ beide Teilintegrale in Gleichung (4.2), während bei $n = 2$ vom ersten Teilintegral ein Wert der Ordnung 1 verbleibt. Das einzige Randintegral mit einem Exponenten $n = 2$ in Gleichung (3.12) lautet:

$$\int\limits_{\Gamma} p\,\frac{\boldsymbol{rn}(1-M^2)}{{R_1}^3}\,\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} = \int\limits_{\Gamma} p\,\frac{\cos\theta(1-M^2)}{\sqrt{1-M^2+{M_r}^2}^{\,3}}r^{-2}\,\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}\,,$$

wobei $\cos\theta$ der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{n}$ ist. Es gilt:

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial n_{\boldsymbol{\eta}}} = \frac{\boldsymbol{rn}}{r}\,.$$

Wenn man – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – die erste Komponente des Machvektors M_1 zu null setzt, ist das erste Teilintegral in Gleichung (4.2)

$$d(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int\limits_{\vartheta_0(\varphi)}^{\vartheta_1(\varphi)} \frac{(1-M^2)\sin\vartheta}{\sqrt{1-M^2+(M_2\sin\varphi\sin\vartheta+M_3\cos\vartheta)^2}^3}\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\,,$$

mit den Vektoren

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon\boldsymbol{n} = \epsilon\begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}0\\ M_2\\ M_3\end{bmatrix}.$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$s_\varphi = \sin\varphi\,,\ c_\varphi = \cos\varphi\,,\ s_\vartheta = \sin\vartheta\,,\ c_\vartheta = \cos\vartheta\,,\ s_{2\vartheta} = \sin(2\vartheta)\,,$$
$$\bar{M}_2 = 1 - {M_2}^2$$

läßt sich das unbestimmte Integral über ϑ analytisch [52] lösen [1]:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Big[&-(\bar{M}_2 c_\vartheta + M_2M_3s_\varphi s_\vartheta)(1-(M_2c_\varphi)^2)^{-1} \\ &(\bar{M}_2 - (M_3s_\vartheta)^2 + (M_2s_\vartheta s_\varphi)^2 + M_2M_3s_\varphi s_{2\vartheta})^{-1/2}\Big]_{\vartheta_0(\varphi)}^{\vartheta_1(\varphi)}\mathrm{d}\varphi\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Das Integral über φ muß auch für konstante Integrationsgrenzen ϑ_0, ϑ_1 numerisch ausgewertet werden. Für den Sonderfall einer Halbkugel, also bei glatter

[1] mit MATHEMATICA

Oberfläche im Punkt $\boldsymbol{\xi}$, läßt es sich jedoch analytisch berechnen:

$$\begin{aligned}
d_{Hk} = & \int\limits_0^{2\pi} \frac{-M_2 M_3 s_\varphi}{(1-(M_2 c_\varphi)^2)\sqrt{1-{M_3}^2-(M_2 c_\varphi)^2}} \mathrm{d}\varphi \\
& + \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-{M_2}^2}}{1-(M_2 c_\varphi)^2} \mathrm{d}\varphi \\
= & \left[\arctan\left(\frac{M_2 M_3 c_\varphi}{\sqrt{1-{M_3}^2-(M_2 c_\varphi)^2}} \right) \right]_0^{2\pi} \\
& + \left[\arctan\left(\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1-{M_2}^2}} \right) + \pi \sum_{i=0}^{\infty} H[\varphi - \pi(0.5+i)] \right]_0^{2\pi} \\
= & \quad 0 + 2\pi \,.
\end{aligned}$$

$H[x]$ ist die Heavisidefunktion:

$$H[x] = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \,.$$

Für eine Halbkugel ergibt sich somit ein Wert von 2π unabhängig vom Geschwindigkeitsvektor. Dies entspricht dem Ergebnis von LONG [32], der für die Ermittlung dieses Werts ein anderes Verfahren als das hier vorgestellte verwendet hat.

Daß für andere Eckgeometrien der Integralwert *nicht* unabhängig von der Lage und dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist, soll am Beispiel einer Viertelkugel gezeigt werden. Die Geometrie ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

Die Komponenten des Machvektors sind $M_2 = M_3 = M/\sqrt{2}$, $M_1 = 0$. Für $d(\boldsymbol{\xi})$ ergibt sich in Abhängigkeit von M:

$$\begin{aligned}
d_{Vk} &= \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{(1-M^2)\sin\vartheta}{\sqrt{1-M^2+\frac{M^2}{2}(\sin\varphi\sin\vartheta+\cos\vartheta)^2}^{\,3}} \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\
&= \pi - 2\arctan\left(\frac{M^2}{2\sqrt{1-M^2}} \right) \,.
\end{aligned}$$

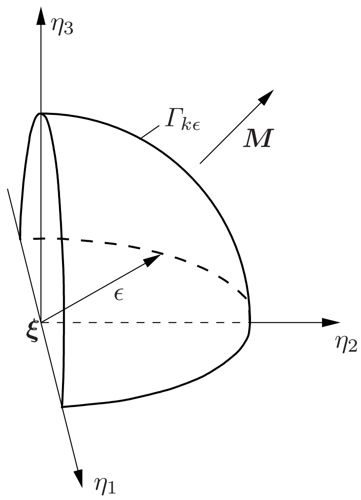


Abbildung 4.2: *Geometrie einer Viertelkugel um den Kollokationspunkt* $\xi \in \Gamma$

Verläuft in Abbildung 4.2 der Vektor $\boldsymbol{M}$ in Richtung einer der drei Koordinatenachsen, erhält man $d_{Vk} = \pi$, unabhängig von M, dem Betrag des Machvektors.

Zusammenfassend lautet die Randintegralgleichung unter Berücksichtigung der Singularität der Randintegrale und unter Vernachlässigung der Quellterme

$$\begin{aligned} \bar{d}(\boldsymbol{\xi})\ p(\boldsymbol{\xi},t) = \int\limits_{\Gamma} \Bigg\{ & -p\frac{\boldsymbol{rn}(1-M^2)}{{R_1}^3} + p_{,n}\frac{1-{M_n}^2}{R_1} \\ & - \boldsymbol{\nabla}_2 p \frac{\boldsymbol{M}_t M_n}{R_1} + \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{R_1 M_n - \boldsymbol{rn}}{c{R_1}^2} \Bigg\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}\,, \end{aligned} \tag{4.4}$$

mit $\bar{d}(\boldsymbol{\xi}) = (4\pi - d(\boldsymbol{\xi}))$ und

$$d(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 2\pi & \text{für } \boldsymbol{\xi} \text{ auf glattem Rand} \\ \text{Gleichung (4.3)} & \text{für } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma\,. \end{cases}$$

Die geschweifte Klammer in Gleichung (4.4) ist zur retardierten Zeit

$$\tau^* = t - R/c$$

auszuwerten.

4.2 Diskretisierung und Approximation

Die Randintegrale in Gleichung (3.12) können ausgewertet werden, wenn

- die Oberfläche Γ in Randelemente Γ_E aufgeteilt wird (Diskretisierung) und
- der Schalldruck p sowie der Fluß q auf der Oberfläche approximiert werden.

In Ort und Zeit werden Ansatzfunktionen $\phi(\boldsymbol{\eta})$ und $\psi(\tau)$ eingeführt, die zusammen mit den diskreten Knotenwerten $\hat{p}$ und $\hat{q}$ den angenäherten Verlauf des Schalldrucks und des Flusses bestimmen. Wenn auf der Oberfläche n Knotenpunkte vorhanden sind und der zu untersuchende Zeitraum in m Zeitschritte unterteilt wird, läßt sich beispielsweise der Schalldruck eines beliebigen Punkts auf der Oberfläche als Summe der Produkte der diskreten Knotenwerte mit den Ortsansätzen ϕ und Zeitansätzen ψ schreiben:

$$p(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \hat{p}_{ij} \phi_i \psi_j \quad \text{für } \boldsymbol{\eta} \in \Gamma \, .$$

Die in der Randintegralgleichung auftretende Zeitableitung des Schalldrucks sowie den Oberflächengradienten des Drucks erhält man durch Differenzieren der entsprechenden Ansatzfunktion:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \hat{p}_{ij} \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \tau} \quad , \qquad \boldsymbol{\nabla}_2 p(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \hat{p}_{ij} \boldsymbol{\nabla}_2 \phi_i \psi_j \, .$$

Als Ansatzfunktionen werden Polynome gewählt. Damit die obigen Ableitungen nicht verschwinden, ist im Ort und in der Zeit für p ein mindestens einmal differenzierbarer Ansatz erforderlich.

4.2.1 Ortsansatz

Um gekrümmte Oberflächen besser approximieren zu können, wird im Ort neben dem linearen Ansatz auch ein quadratischer Ansatz implementiert. Es werden *isoparametrische* Dreiecks- und Viereckselemente verwendet, das heißt, die

Ansatzfunktionen – Polynome ersten und zweiten Grades – geben nicht nur den Verlauf der Zustandsgrößen im Element an, sie dienen auch zur Beschreibung der Elementgeometrie [1].

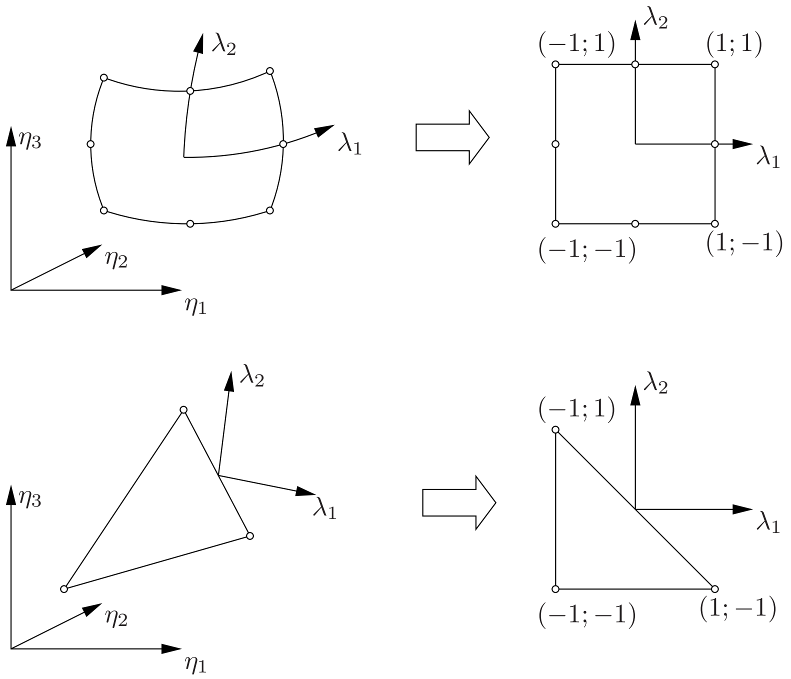
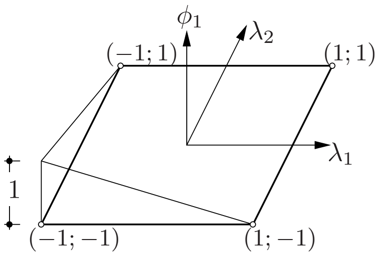


Abbildung 4.3: *Transformation eines isoparametrischen 8-Knoten Viereckselements (quadratischer Ansatz) und eines isoparametrischen 3-Knoten Dreieckselements (linearer Ansatz)*

Zu jedem Knoten eines Elements gehört eine Ansatzfunktion, die gerade so gewählt wird, daß der Funktionswert in diesem Knoten 1 und in allen anderen Knoten des Einheitselements 0 ist. Als Beispiel seien im Abbildung 4.4 nur die Ansatzfunktionen eines linearen 4-Knoten Viereckselements aufgeführt. Deren Einheitselement ist ein Quadrat der Fläche 4 mit dem Koordinatenursprung in seinem Mittelpunkt. Die Knoten des Elements sind die Eckpunkte des Vierecks. Weitere Elemente mit ihren Ansatzfunktionen finden sich in der Finite-Element Literatur, zum Beispiel in [54].



$$\begin{array}{rclll}
\phi_1(\lambda_1,\lambda_2) & = & (1-\lambda_1) & (1-\lambda_2)\,/ & 4 \\
\phi_2(\lambda_1,\lambda_2) & = & (\lambda_1+1) & (1-\lambda_2)\,/ & 4 \\
\phi_3(\lambda_1,\lambda_2) & = & (\lambda_1+1) & (\lambda_2+1)\,/ & 4 \\
\phi_4(\lambda_1,\lambda_2) & = & (1-\lambda_1) & (\lambda_2+1)\,/ & 4
\end{array}$$

Abbildung 4.4: *Ansatzfunktion auf linearem Viereckselement*

Die Transformationsvorschrift zwischen einem isoparametrischen Element mit n Knotenpunkten und dem zugehörigen Einheitselement lautet demnach

$$\boldsymbol{\eta}(\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i \phi_i(\lambda_1,\lambda_2)\,,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ die Koordinaten des i-ten Knotens sind. Da die Integration über die Einheitselemente Γ_E als Träger der Ortsansätze erfolgen soll, müssen die Integrale transformiert werden. Der Transformationsvektor ist

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \lambda_2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_1} \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_2} \right) .$$

Ein transformiertes Integral kann gemäß

$$\int_{\Gamma} k \; \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{tr(\phi)} k \; J \mathrm{d}\Gamma_E$$

mit der Jacobideterminante $J = |\boldsymbol{J}|$ berechnet werden. Es gilt für den Träger der Ansatzfunktion ϕ:

$$tr(\phi) := \{\boldsymbol{\eta} \;\mid\; \phi(\boldsymbol{\eta}) \neq 0\}\,.$$

Für den Oberflächengradienten in Gleichung (4.4) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_2 p &= \frac{\partial p}{\partial \lambda_1}\boldsymbol{l}_1 + \frac{\partial p}{\partial \lambda_2}\boldsymbol{l}_2 \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_1}\hat{p}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_j}{\partial \lambda_1}\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_2}\hat{p}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_j}{\partial \lambda_2}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_1}\hat{p}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_j}{\partial \lambda_1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_2}\hat{p}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_j}{\partial \lambda_2}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j\right)
\end{aligned}
$$

4.2.2 Zeitansatz

Der zu untersuchende Zeitraum wird in äquidistante Zeitschritte unterteilt. Innerhalb eines Zeitschritts werden die einfachstmöglichen Ansätze gewählt: ein linearer Ansatz für p und ein konstanter Ansatz für q.

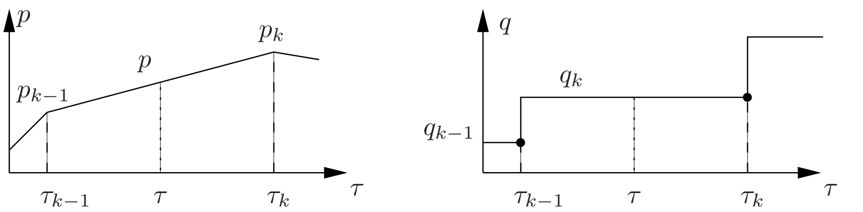


Abbildung 4.5: *Zeitansatz für p und q*

$$
\begin{aligned}
p(\tau) &= p_{k-1}\frac{\tau_k - \tau}{\Delta\tau} + p_k \frac{\tau - \tau_{k-1}}{\Delta\tau} \\
\dot{p}(\tau) &= \frac{p_k - p_{k-1}}{\Delta\tau} \\
q(\tau) &= q_k
\end{aligned}
$$

für $\tau_{k-1} \leq \tau \leq \tau_k$ und mit $\tau_k = k\,\Delta\tau\ , \quad k = 1, 2, \ldots$.

Wenn der zu untersuchende Zeitraum T in m Zeitschritte unterteilt wird, kann man mit Hilfe der Heavisidefunktion H die Funktionen $p(\tau)$ und $q(\tau)$ als Summe schreiben:

$$p(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \left[p_{k-1} \frac{\tau_k - \tau}{\Delta\tau} + p_k \frac{\tau - \tau_{k-1}}{\Delta\tau} \right] [H(\tau - \tau_{k-1}) - H(\tau - \tau_k)]$$

$$\dot{p}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k - p_{k-1}}{\Delta\tau} [H(\tau - \tau_{k-1}) - H(\tau - \tau_k)]$$

$$q(\tau) = q_k [H(\tau - \tau_{k-1}) - H(\tau - \tau_k)]$$

für $0 \leq \tau \leq T$ mit $\Delta\tau = T/m$.

4.3 Punktkollokation

Eine vom Rechenaufwand günstige Methode zur Berechnung einer Näherungslösung der Randintegralgleichung ist das Verfahren der Punktkollokation. Dabei wird die Erfüllung der Randintegralgleichung lediglich in gewissen Punkten, den *Kollokationspunkten* gefordert. Diese liegen bei der hier verwendeten direkten Randelementmethode auf den diskretisierten Rändern. Meistens wählt man als Kollokationspunkte die Eckpunkte der Randelemente, um den Rechenalgorithmus möglichst einfach zu gestalten.

Um von der Randintegralgleichung zu einem Gleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Randwerte zu kommen, müssen beim Kollokationsverfahren lediglich die Ansatzfunktionen für p und q in die Randintegralgleichung eingesetzt werden. Anschließend wird die Beobachterkoordinate $\boldsymbol{\xi}$ nacheinander in alle Kollokationspunkte gelegt und die Randintegralgleichung ausgewertet. So erhält man für jede Unbekannte (eine pro Kollokationspunkt) eine Gleichung. Dieses Gleichungssystem muß für jeden Zeitschritt neu aufgestellt werden.

Zunächst soll hier der relativ einfache Fall eines einzigen fahrenden Rands untersucht werden, der sich geradlinig mit Unterschallgeschwindigkeit durch das ruhende Medium bewegt. Ausgangspunkt für die folgenden Rechnungen ist die Randintegralgleichung (4.4), die hier noch einmal in abgekürzter Schreibweise angegeben wird:

$$\bar{d}(\boldsymbol{\xi})\; p(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_{\Gamma} \left\{ -K_p\, p + K_q\, q + \frac{K_{pp}}{c} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \tag{4.5}$$

mit $\bar{d}(\boldsymbol{\xi}) = (4\pi - d(\boldsymbol{\xi}))$ und

$$K_p = \frac{\boldsymbol{rn}(1-M^2)}{{R_1}^3} + \frac{\boldsymbol{M}_t M_n}{R_1}\boldsymbol{\nabla}_2$$

$$K_q = \frac{1-{M_n}^2}{R_1}$$

$$K_{pp} = \frac{R_1 M_n - \boldsymbol{rn}}{{R_1}^2}\,.$$

Zunächst wird der Zeitansatz in Gleichung (4.5) eingesetzt. Dabei muß beachtet werden, daß der Integrand zur retardierten Zeit $\tau^* = t - R/c$ auszuwerten ist.

$$\bar{d}(\boldsymbol{\xi})\; p(\boldsymbol{\xi},t) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma} \left[H\left(t - \frac{R}{c} - \tau_{k-1}\right) - H\left(t - \frac{R}{c} - \tau_k\right) \right]$$
$$\left(-K_p \left[p_{k-1}\frac{\tau_k - t + R/c}{\Delta\tau} + p_k\frac{t - R/c - \tau_{k-1}}{\Delta\tau} \right] \right.$$
$$\left. + \frac{K_{pp}}{c}\;\frac{p_k - p_{k-1}}{\Delta\tau} + K_q\; q_k \right) \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$$

Der Beobachtungszeitpunkt wird an das Ende des i-ten Zeitschritts gelegt, so daß mit $t = i\;\Delta\tau$, $\tau_k = k\;\Delta\tau$ und $\tau_{k-1} = (k-1)\Delta\tau$ gilt:

$$\bar{d}(\boldsymbol{\xi})\; p(\boldsymbol{\xi}, i\Delta\tau)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma} \left[H_2 - H_1\right] \left[-K_p \left(\frac{R}{c\Delta\tau} - i + k \right) - \frac{K_{pp}}{c\Delta\tau} \right] p_{k-1}\, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma} \left[H_2 - H_1\right] \left[-K_p \left(i - k - \frac{R}{c\Delta\tau} + 1 \right) + \frac{K_{pp}}{c\Delta\tau} \right] p_k\, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma} \left[H_2 - H_1\right] K_q\; q_k\, \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$$

mit

$$H_2 - H_1 = H\left(i - k + 1 - R/(c\Delta\tau)\right) - H\left(i - k - R/(c\Delta\tau)\right) \ .$$

Nun muß noch der Ortsansatz eingesetzt werden. Bei n Kollokationspunkten ergibt sich folgende Formel:

$$\begin{aligned}
&\bar{d}(\boldsymbol{\xi})\; p(\boldsymbol{\xi}, i\Delta\tau) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{tr(\phi_j)} \left[H_2 - H_1\right] \left[-K_p\left(\frac{R}{c\Delta\tau} - i + k\right) - \frac{K_{pp}}{c\Delta\tau}\right] \\
&\qquad\qquad \cdot \phi_j J \,\mathrm{d}\Gamma_E \ \cdot p_{j(k-1)} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{tr(\phi_j)} \left[H_2 - H_1\right] \left[-K_p\left(i - k + 1 - \frac{R}{c\Delta\tau}\right) + \frac{K_{pp}}{c\Delta\tau}\right] \\
&\qquad\qquad \cdot \phi_j J \,\mathrm{d}\Gamma_E \ \cdot p_{jk} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{tr(\phi_j)} \left[H_2 - H_1\right] K_q \cdot \phi_j J \,\mathrm{d}\Gamma_E \ \cdot q_{jk}
\end{aligned}$$

Integriert wird über den diskretisierten Rand Γ_E, der sich aus den Randelementen als Träger der Ortsansatzfunktionen ϕ_j zusammensetzt. Obige Formel läßt sich in einem Hypermatrizenschema etwas übersichtlicher darstellen.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}+\mathbf{D} & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1m} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22}+\mathbf{D} & \cdots & \mathbf{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{m1} & \mathbf{H}_{m2} & \cdots & \mathbf{H}_{mm}+\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1m} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \mathbf{G}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{m1} & \mathbf{G}_{m2} & \cdots & \mathbf{G}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Die einzelnen Untermatrizen $\mathbf{H}_{ik}$ beziehungsweise $\mathbf{G}_{ik}$ und $\mathbf{D}$ haben den Rang n und sind wie folgt aufgebaut:

$$\mathbf{H}_{ik} = \begin{bmatrix} h^{11} & h^{12} & \cdots & h^{1n} \\ h^{21} & h^{22} & \cdots & h^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{n1} & h^{n2} & \cdots & h^{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{ik} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & \cdots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \cdots & g^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & g^{n2} & \cdots & g^{nn} \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} h_{ik}^{ab} = & \int\limits_{tr(\phi_j)} \left\{ \left[K_p \left(\frac{R}{c\Delta\tau} - i + k + 1 \right) + \frac{K_{pp}}{c\Delta\tau} \right] \right. \\ & \qquad \left. [H_1 - H_0] \cdot \phi_b J \right\}_{\xi_a, t_i; \eta_b, \tau_{k+1}} \mathrm{d}\Gamma_E \\ & + \int\limits_{tr(\phi_j)} \left\{ \left[K_p \left(i - k + 1 - \frac{R}{c\Delta\tau} \right) - \frac{K_{pp}}{c\Delta\tau} \right] \right. \\ & \qquad \left. [H_2 - H_1] \cdot \phi_b J \right\}_{\xi_a, t_i; \eta_b, \tau_k} \mathrm{d}\Gamma_E \end{aligned} \tag{4.7}$$

sowie

$$g_{ik}^{ab} = \int\limits_{tr(\phi_j)} \Big\{ K_q \left[H_2 - H_1 \right] \Big\}_{\xi_a, t_i; \eta_b, \tau_k} \mathrm{d}\Gamma_E \,. \tag{4.8}$$

Die Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \bar{d}^1 & & & \\ & \bar{d}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{d}^n \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \bar{d}^a = \bar{d}(\boldsymbol{\xi}_a) \,.$$

Die Matrizen $\mathbf{H}_{ik}$ und $\mathbf{G}_{ik}$ sind dünn besetzt, was an den Differenzen der Heavisidefunktionen

$$\begin{aligned} [H_1 - H_0] &= \left[H\left(i - k - \frac{R}{c\Delta\tau} \right) - H\left(i - k - 1 - \frac{R}{c\Delta\tau} \right) \right] \\ [H_2 - H_1] &= \left[H\left(i - k + 1 - \frac{R}{c\Delta\tau} \right) - H\left(i - k - \frac{R}{c\Delta\tau} \right) \right] \end{aligned}$$

liegt, die in den Integralen für h_{ik}^{ab} und g_{ik}^{ab} auftreten. Sie grenzen die jeweilige Kugelschale ein, für die der Integrand auszuwerten ist. Wenn man einen stationären Rand betrachtet, schneidet diese Differenz aus dem gesamten Gebiet ein Volumen heraus, was zwischen zwei Kugelschalen liegt, die beide den Kollokationspunkt ξ als Mittelpunkt haben. Die Differenz der Radien der Kugelschalen ist gerade $c\Delta\tau$, also der Weg, den eine Wellenfront in einem Zeitschritt zurücklegt. Die absolute Größe der Radien richtet sich nach der Zeitdifferenz zwischen Emissionszeitpunkt τ_k und Kollokationszeitpunkt t_i. Nur Feldpunkte η, die innerhalb dieses Volumens liegen, leisten einen Beitrag zur jeweiligen Matrix $\mathbf{H}_{ik}$ beziehungsweise $\mathbf{G}_{ik}$.

Wenn k größer wird als i verschwinden die Heavisidefunktionen, so daß das obere Dreieck der Hypermatrizen $\mathbf{H}$ und $\mathbf{G}$ null wird. Wenn zudem eine konstante Geschwindigkeit des Rands vorausgesetzt wird, ist der Vektor $\boldsymbol{R}$ – also der Weg, den der Schall in der Luft vom Punkt $\boldsymbol{\eta}$ zum Punkt $\boldsymbol{\xi}$ zurücklegt – nicht zeitabhängig. Damit sind Untermatrizen $\mathbf{H}_{ik}$ und $\mathbf{G}_{ik}$ mit gleicher Differenz $i{-}k$ ebenfalls identisch. Es läßt sich des weiteren eine Differenz $l_0 = (i{-}k)_0$ angeben, ab der alle Heavisidefunktionen für alle in der Diskretisierung vorkommenden

Abstände R null werden.

$$l_0 = (i-k)_0 > \frac{\max R}{c\Delta\tau} + 1 \tag{4.9}$$

Es ergibt sich also im Hypermatrizenschema folgende Diagonalstruktur (hier nur angegeben für die $\mathbf{G}$-Matrix):

$$\mathbf{G}\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 & & & & & \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_{m-1} \\ \boldsymbol{q}_m \end{bmatrix} . \tag{4.10}$$

Der Index an den Submatrizen steht für die Differenz zwischen Emissions- und Beobachtungszeitschritt, $\boldsymbol{q}_i$ steht für den Schallfluß im i-ten Zeitschritt.

Es liegt nahe, bei der Lösung des Gleichungssystems zeitschrittweise vorzugehen. Bei NEUMANNschen Randbedingungen auf dem gesamten Rand erhält man die unbekannten Schalldrücke im i-ten Zeitschritt mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{D})\boldsymbol{p}_i &= \mathbf{G}_0\boldsymbol{q}_i + \sum_{k=2}^{\min(l_0,i)} \left(\mathbf{G}_{k-1}\boldsymbol{q}_{i-k+1} - \mathbf{H}_{k-1}\boldsymbol{p}_{i-k+1}\right) \\ &= \mathbf{G}_{11}\boldsymbol{q}_i + \hat{\boldsymbol{r}}_i \, . \end{aligned}$$

Wenn ein gemischtes Randwertproblem vorliegt, müssen die Spalten der $\mathbf{H}_{11}$- und $\mathbf{G}_{11}$-Matrizen je nach Randbedingung umsortiert werden. In diesem Fall erhält man für den i-ten Zeitschritt

$$\mathbf{L}_0\boldsymbol{u}_i = \mathbf{R}_0\boldsymbol{b}_i + \hat{\boldsymbol{r}}_i \tag{4.11}$$

mit den bekannten Randwerten $\boldsymbol{b}_i$ und den Unbekannten $\boldsymbol{u}_i$. Wenn sich im Laufe des Zeitschrittverfahrens die Randbedingungsart der einzelnen Knoten nicht ändert, bleibt auch die zu zerlegende Matrix $\mathbf{L}$ konstant. Es ist somit für die Berechnung beliebig vieler Zeitschritte nur *eine* Zerlegung einer dünn besetzten $n \times n$ Matrix durchzuführen.

4.4 Numerische Auswertung der Integrale

Die noch in der Formulierung verbliebenen Ortsintegrale in den Gleichungen (4.7) und (4.8) lassen sich im allgemeinen analytisch nicht berechnen. Sie werden daher über den Randelementen als Träger der Ortsansätze numerisch berechnet. Für die Auswertung wird ein Quadraturschema benutzt. Dabei wird der Integrand an gewissen Stützstellen (den sogenannten Gaußpunkten) $\hat{\boldsymbol{x}}$ ausgewertet und mit einer der jeweiligen Stützstelle zugeordneten Wichte w multipliziert und aufsummiert [54]:

$$\int\limits_{tr(\phi_j)} K(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_E \approx \sum_{i=1}^{n_{St}} K(\hat{\boldsymbol{x}}_i) \cdot w_i \, ,$$

Der Fehler, der durch diese numerische Auswertung entsteht, hängt neben dem angewendeten Quadraturschema auch von der gewählten Anzahl der Stützstellen n_{St} und den Eigenschaften des Integranden ab.

Reguläre Integrale

Befindet sich der Kollokationspunkt *nicht* im Element, über das integriert wird, ist der Integralkern *regulär* und läßt sich problemlos mit dem Standard GAUSS-Verfahren näherungsweise berechnen. Um Rechenzeit zu sparen, ist es sinnvoll, die Anzahl der Stützstellen von der Glattheit des Integranden abhängig zu machen. Diese wiederum hängt in erster Linie vom Weg R ab, den der Schall vom Quellpunkt zum Beobachtungspunkt zurücklegt, beziehungsweise von der Zeitdifferenz $(i - k)\Delta\tau$ zwischen Emissions- und Beobachtungszeitpunkt. Im Rechenprogramm wird daher die Anzahl der Stützstellen entsprechend angepaßt.

Schwach singuläre Integrale

Sämtliche Integrale in Gleichung 3.12 sind – wie in Abschnitt 4.1 angesprochen – *schwach* singulär. Diese Integrale können mit einer von JUN/BEER/MEEK vorgeschlagenen Methode berechnet werden [30]. Sie basiert auf einer Polarkoordinatentransformation. Liegt der singuläre Punkt im Eckpunkt eines Dreiecks, wird dieses Dreieck gemäß Abbildung 4.6 auf ein Viereck abgebildet, so daß zwei Eckpunkte des Vierecks dem singulären Punkt des Dreiecks entsprechen. In diesem Viereck kann das Standard GAUSS-Verfahren zur Integration verwendet werden. Die Jacobideterminante dieser Transformation ist von der Ordnung r,

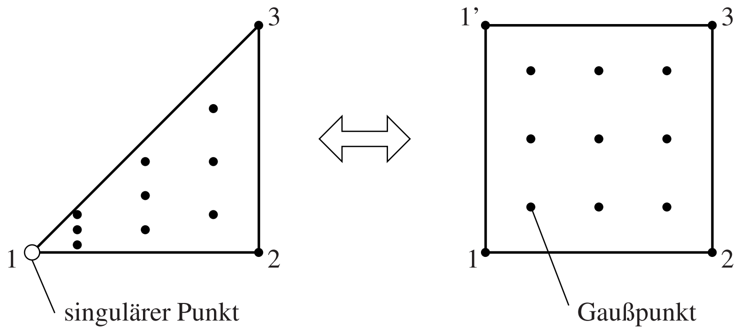


Abbildung 4.6: *Transformation zur Behandlung schwach singulärer Integrale*

so daß die Singularität des Integralkerns aufgehoben wird. Bei Viereckselementen wird das Integrationsgebiet je nach Lage des singulären Punkts in mehrere Dreiecke unterteilt.

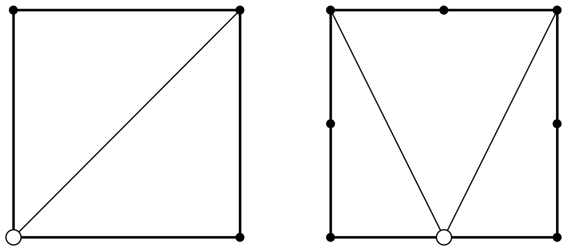


Abbildung 4.7: *Unterteilung von singulären Viereckselementen in Dreiecke in Abhängigkeit von der Lage des singulären Punktes (○)*

Numerische Auswertung des integralfreien Terms

Die numerische Berechnung des sogenannten integralfreien Terms erfolgt nach einem Schema, das von GUIGGIANI/GIGANTE in [24] beschrieben wird. Der Kollokationspunkt liegt auf einer Ecke eines Rands Γ. Die Schnittgeraden der am Kollokationspunkt zusammenlaufenden Tangentialebenen sind bekannt. In einem lokalen Koordinatensystem ζ schneidet jede Ebene zusammen mit dem

ζ_3-Vektor einen Teil aus der Kugeloberfläche aus, über die das Integral aus Gleichung (4.3) ausgewertet werden muß. Die Ober- und Untergrenzen der Winkel φ und $\vartheta(\varphi)$ ergeben sich aus der Abbildung 4.8. Bei der Wahl des lokalen Koordinatensystems ist darauf zu achten, daß eine Komponente des Machvektors null werden muß, da sonst das Integral über ϑ nicht analytisch berechnet werden kann.

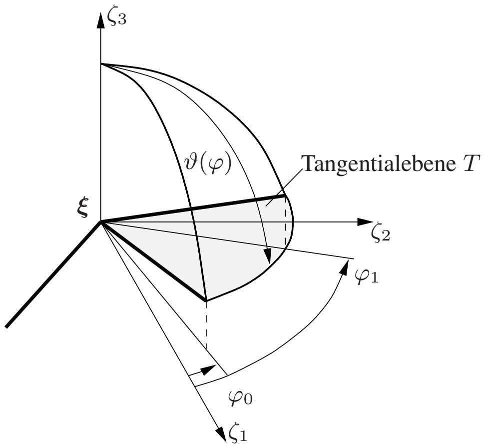


Abbildung 4.8: *ϵ-Umgebung eines Kollokationspunkts in einem Eckpunkt von Γ: Integrationsgrenzen für den von der Tangentialebene T herausgeschnittenen Anteil der Kugeloberfläche*

5 Verifikationsbeispiele

In diesem Kapitel soll mit einigen einfachen Beispielen das vorgestellte Näherungsverfahren getestet und im Hinblick auf seine Genauigkeit, Stabilität und Anwendbarkeit geprüft werden. Detaillierte Untersuchungen zur Stabilität von Randelementmethoden im Zeitbereich finden sich in [28] [21] [44].

5.1 Stabilität

Stabilitätsprobleme sind in erster Linie bei Innenraumproblemen zu erwarten. Das Stabilitätsverhalten wird im wesentlichen durch den Zeitansatz (hier: linearer Zeitansatz für p, konstanter Zeitansatz für q) und von einer Beziehung zwischen Orts- und Zeitdiskretisierung beeinflußt. Um diese Beziehung zu quantifizieren, wird eine mittlere Elementabmessung h der Ortsdiskretisierung berechnet und in das Verhältnis zur Zeitschrittweite gesetzt:

$$\beta = \frac{c\Delta\tau}{h}.$$

Dieses Verhältnis ist der Anteil von h, der in einem Zeitschritt von der Wellenfront überstrichen wird.

5.1.1 Innenraumproblem: Quader

Ein Quader mit den Abmessungen 2m x 4m x 2m wird an seiner Vorderseite ($y = 0$) mit der Randbedingung $q = 1$Pa/m und an seiner Rückseite mit $p = 0$ beaufschlagt. An den Seitenwänden ist $q = 0$. Bei homogenen Anfangsbedingungen ergibt sich ein eindimensionales Problem, weil bei konstanter y-Koordinate alle Zustandsgrößen ebenfalls konstant sind. In y-Richtung läuft eine Welle in dem Quader hin und her. An der Vorderseite entspricht entspricht der exakte Druckverlauf einer Sägezahnfunktion.

Wegen der Symmetrie reicht es aus, ein Viertel des Quaders zu diskretisieren und zwei Symmetrieebenen anzugeben (x-y- und y-z-Ebene). Zunächst werden

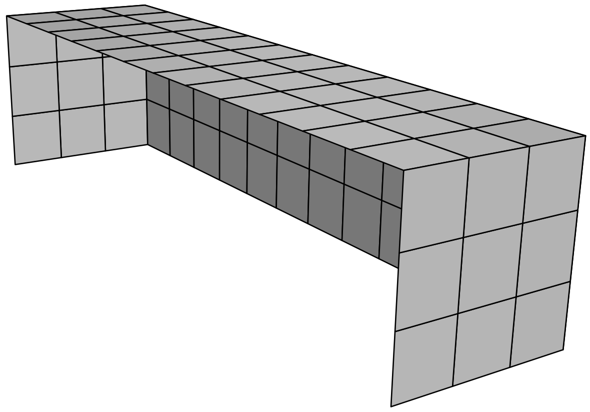


Abbildung 5.1: *Diskretisierung des Viertelquaders mit 90 Elementen*

lineare quadratische Elemente der Kantenlänge 1/3m verwendet. Die Zeitdiskretisierung wird so vorgenommen, daß pro Zeitschritt die Welle um genau eine Elementlänge fortschreitet. Dies ergibt bei einer Wellengeschwindigkeit von 340m/s eine Zeitschrittweite von 9.804e-04s, was einem Verhältnis von $\beta = 1$ entspricht.

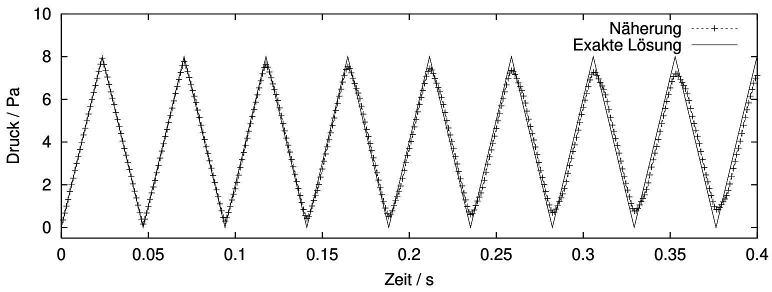


Abbildung 5.2: *Zeitverlauf des Drucks an der Vorderseite: numerische Dämpfung bei $\beta = 1$*

Man erkennt in Abbildung 5.2, daß zu Beginn der exakte Verlauf gut angenähert wird. Im weiteren Verlauf der Rechnung macht sich jedoch eine numerische Dämpfung bemerkbar. Die Maximalwerte der Sägezahnfunktion werden nicht ganz von der Näherungslösung erreicht. Nach einer gewissen Zeit klingt die Schwingung vollständig ab und man erhält die statische Lösung von $p = 4$Pa an der Quadervorderseite. Numerische Dämpfung ist ein Merkmal aller stabilen Näherungsverfahren und kann zu größeren Ungenauigkeiten führen, wenn die Welle wie in diesem Beispiel häufig an einer Berandung reflektiert wird. Wünschenswert ist ein Verfahren, welches bei geringer numerischer Dämpfung noch stabil ist.

Interessant ist das Verhalten der Näherungslösung, wenn der Parameter β variiert wird. In Abbildung 5.3 ist die Druckamplitude aufgetragen, die zum Zeitpunkt $t \approx 0.58$s für verschiedene Werte von β erreicht wird. Man erkennt ausge-

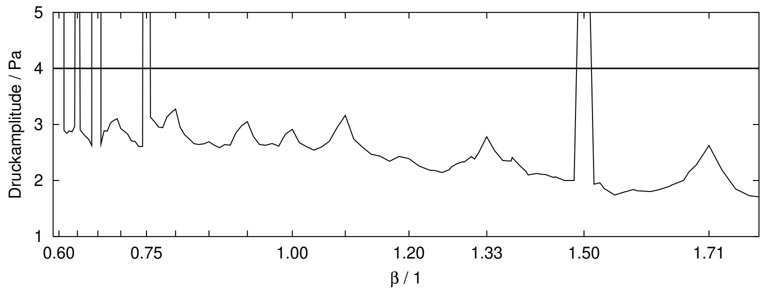


Abbildung 5.3: *Druckamplitude: Abhängigkeit von Instabilität und numerischer Dämpfung vom Diskretisierungsparameter* β

prägte lokale Maxima bei den β-Werten, die man durch ganzzahlige Division des Ortsdikretisierungsparameters (hier: 12 Elemente pro Quaderlänge) erhält, also bei

$$\beta = \ldots \frac{12}{11}, \frac{12}{12}, \frac{12}{13}, \ldots$$

An den Stellen, an denen die Druckamplitude den exakten Wert von 4Pa überschreitet, liegt Instabilität vor. Diese Instabilitätsstellen häufen sich für kleine Werte von β. Bei einem Wert kleiner als 0.6 ist so gut wie keine Stabilität mehr anzutreffen. Zudem wird bei kleinen β-Werten das Integrationsgebiet nur schlecht approximiert, weil die Welle in jedem Zeitschritt immer nur einen kleinen Teil eines Elements überstreicht.

In Abbildung 5.4 erkennt man, daß auch im instabilen Fall zunächst numerische Dämpfung auftreten kann. Nach gewisser Zeit verstärken sich jedoch numerische Ungenauigkeiten und veursachen Instabilitäten.

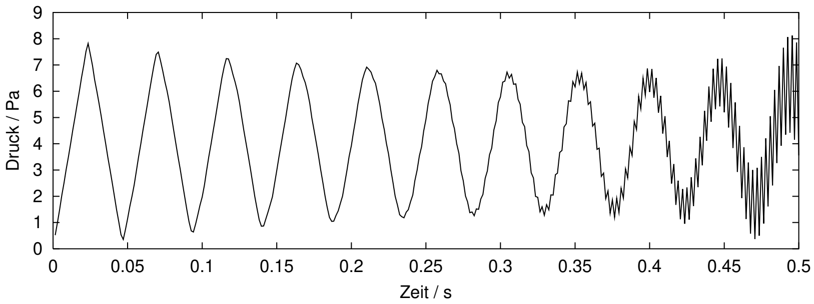


Abbildung 5.4: *Numerische Dämpfung bei einem ungünstigen, d.h. zur Instabilität führendem* $\beta = 1.5$

Daß nicht nur die ungenaue Approximation des Integrationsgebiets bei kleinen Zeitschritten für diese Instabilitäten verantwortlich ist, zeigt Abbildung 5.3: bei $\beta = 1.5$ findet man noch eine Instabilitätsinsel. Um Instabilitäten zu vermeiden sollte man im Bereich von $0.8 \leq \beta \leq 1.2$ bleiben, der bei den meisten Beispielen frei von Instabilitäten ist und dennoch eine vergleichsweise geringe numerische Dämpfung aufweist.

Die numerische Dämpfung ist im wesentlichen von der Zeitschrittweite abhängig und nur insofern von der Ortsdiskretisierung, als daß man bei feinerer Ortsdiskretisierung auch kleinere Zeitschritte wählen kann. Dies zeigt Abbildung 5.5. Hier ist die Druckamplitude an der Quadervorderseite zu einem festen Zeitpunkt für verschiedene Ortsdiskretisierungen in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite aufgetragen. In den Bereichen, in denen sich die Kurven überlappen, stimmt die numerische Dämpfung annähernd überein.

5.1.2 Außenraumproblem: pulsierende Kugel

Bei Außenraumproblemen treten Stabilitätseffekte in den Hintergrund, weil der Einfluß der reflektierten Schallwellen wesentlich geringer ist. Im Gegensatz zum

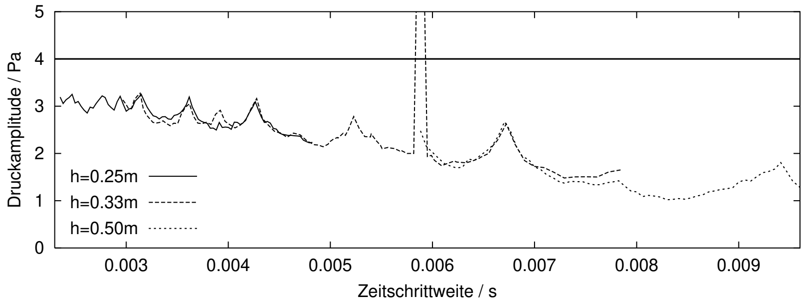


Abbildung 5.5: *Einfluß von Ortsdiskretisierung und Zeitschrittweite auf die numerische Dämpfung*

vorherigen Beispiel – einem eindimensionalen Problem, in dem die Wellenamplitude mit der Zeit nicht abklingt – breitet sich eine Welle im Außenraum räumlich aus. Deshalb verringert sich die Amplitude bei vielen Reflektionen allein schon aufgrund des zurückgelegten Wegs der Welle. Diesen Effekt nennt man auch *Abstrahldämpfung*.

Zumindest im Frequenzbereich können bei Außenraumproblemen aber sogenannte *fiktive Eigenfrequenzen* eine Rolle spielen, die sich aus dem zugeordneten Innenraumproblem ergeben. Voraussetzung ist eine Anregung, die in der Nähe einer Eigenfrequenz des Innenraumproblems liegt. Im Frequenzbereich müssen Maßnahmen zur Unterdrückung dieser Effekte getroffen werden [51]. Ob fiktive Eigenfrequenzen auch im Zeitbereich auftreten, soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Dies geschieht anhand eines Beispiels, für das eine analytische Lösung existiert.

Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius r_K. Der Rand der Kugel pulsiert harmonisch um einen Mittelwert r_0 mit der Amplitude Δr. Es gilt $\Delta r \ll r_0$. Da die Geometrie des Rands wie auch die Anregung kugelsymmetrisch ist, ist es sinnvoll, die analytische Lösung in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ x_2 &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ x_3 &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

Bei der Transformation des Laplace-Operators in der Wellengleichung für das

Geschwindigkeitpotential verschwinden alle partiellen Ableitungen nach φ und ϑ, da auch das Schallfeld kugelsymmetrisch ist, so daß gilt

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2}.$$

Damit ist die homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r\phi}{\partial t^2} = 0$$

reduziert auf einen eindimensionalen Fall. Das Schallfeld, das im Außenraum durch die harmonische Anregung

$$r_K(t) = r_0 + \Delta r e^{i\omega t}$$

induziert wird, kann mit dem Ansatz

$$\phi = \frac{C}{r} e^{i\omega(t-r/c)} = \frac{C}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

ermittelt werden, wobei C eine noch zu bestimmende Konstante und $k = \omega/c$ die Wellenzahl ist. Das Geschwindigkeitsfeld v ergibt sich aus dem Gradienten des Geschwindigkeitspotentials

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C}{r^2}(1 + ikr) e^{i(\omega t - kr)}$$

und ist – kleine Amplituden vorausgesetzt – bei $r \approx r_0$ gleich der Geschwindigkeit der Kugeloberfläche

$$v_K = \frac{\partial}{\partial t} r_K = i\omega \Delta r e^{i\omega t} = \frac{C}{r_0^2}(1 + ikr_0) e^{i(\omega t - kr_0)},$$

woraus sich die Integrationskonstante C ergibt:

$$C = \frac{i\omega r_0^2 \Delta r}{1 + ikr_0} e^{ikr_0}.$$

Damit ist die Funktion des Schalldrucks

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho \omega^2 \Delta r \frac{r_0^2}{r(1 + ikr_0)} e^{ik(r_0 - r)} e^{i\omega t}.$$

Die Randbedingung für den Fluß q_K ist proportional zur Beschleunigung der Kugeloberfläche:

$$q_K = -\rho \frac{\partial^2 r_K}{\partial t^2} = -\rho\omega^2 \Delta r e^{i\omega t} = \hat{q}_K e^{i\omega t}.$$

Mit der Amplitude $\hat{q}_K$ für den Fluß auf der Kugeloberfläche erhält man für den Schalldruck schließlich

$$p = \hat{q}_K \frac{r_0^2}{r(1+ikr_0)} e^{ik(r_0-r)} e^{i\omega t}.$$

Daraus ergeben sich die reelle Amplidude $\hat{p}$ und der Nullphasenwinkel φ_p des Drucks:

$$\hat{p} = \left| \frac{\hat{q}_K r_0^2}{r(1+ikr_0)} \right| = \frac{\hat{q}_K r_0^2}{r\sqrt{(kr_0)^2+1}}\,, \qquad \varphi_p = k(r-r_0).$$

Wenn man dieses Beispiel mit einem Zeitbereichsprogramm nachrechnen möchte, muß man beachten, daß bei $t = 0$ keine homogenen Anfangsbedingungen herrschen ($\dot{p}(t=0) \neq 0$), so daß sich bei einer Randbedingung

$$q_K = \begin{cases} \hat{q}_K \sin\omega t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

eine stationäre Schwingung erst nach einer Einschwingphase einstellen kann.

Untersucht wird die Frequenz der Wellenzahl π, die der ersten Eigenfrequenz des Innenraumproblems entspricht. Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel kann weder die Geometrie, noch das Last-Zeit Gesetz exakt approximiert werden, so daß zusätzlich ein Diskretisierungsfehler auftritt. Das sinusförmige Last-Zeit-Gesetz der Anregung wird mit sechs Zeitschritten pro Periode approximiert. Bei 48 Elementen für eine Achtelkugel des Radius 2 ergeben sich mittlere Elementlänge und β-Wert zu $h = 0.362$m und $\beta = 0.92$.

In Abbildung 5.6 sind die Druckverläufe für einen Punkt auf der Kugeloberfläche und den Mittelpunkt der Kugel über einen Zeitraum von 200 Zeitschritten dargestellt. Im Innenraum, wo die exakte Lösung null ist, baut sich eine stehende Welle auf, deren Amplitude linear mit der Zeit anwächst. Diese Welle ist aber von der Außenraumlösung entkoppelt, wie die Abbildungen 5.6 und 5.7 zeigen. Der Druck auf der Kugel und im Außenraum bleibt beschränkt und wird von der relativ groben Orts- und Zeitdiskretisierung gut approximiert. Wenn man die

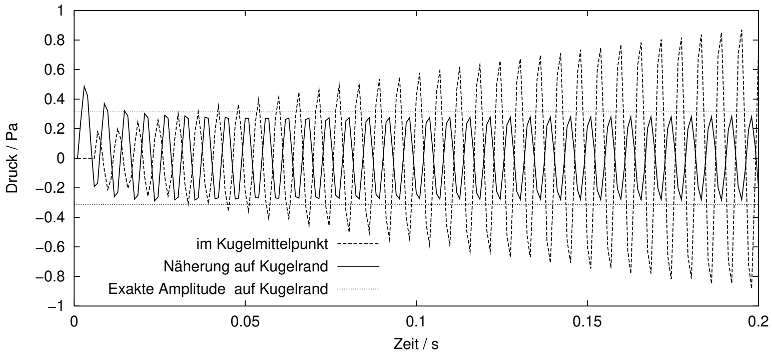


Abbildung 5.6: *Außenraumproblem eines Kugelstrahlers: Zeitverlauf des Schalldrucks im Mittelpunkt und auf dem Rand eines Kugelstrahlers bei einer Anregung mit der ersten Eigenfrequenz des Innenraumproblems*

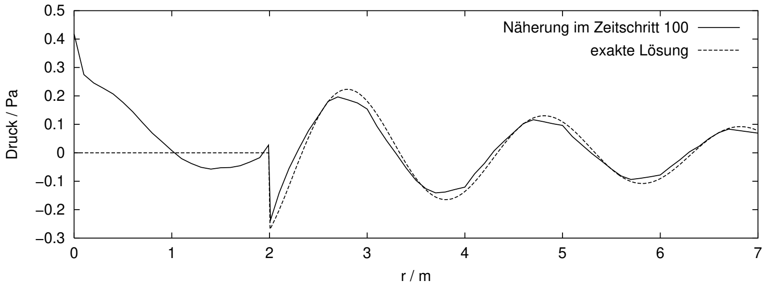


Abbildung 5.7: *Außenraumproblem eines Kugelstrahlers: stehende Welle im Innern der Kugel und Schalldruckverteilung im Außenraum bei einer Anregung mit der ersten Eigenfrequenz des Innenraumproblems*

Diskretisierung verbessert, baut sich die Welle im Innenraum zwar langsamer auf, steigt aber dennoch linear mit der Zeit an.

Weitere Rechnungen haben gezeigt, daß insbesondere bei einer Anregung im Bereich der Eigenfrequenzen des Innenraumproblems für die Berechnung des Außenraumproblems die richtige Wahl des β-Werts von entscheidender Bedeutung ist. Während bei anderen Anregungsfrequenzen ein extrem niedriger β-Wert von 0.3 noch sehr gute Ergebnisse liefern kann, muß bei der hier gewählten Anregung ein β-Wert in der Nähe von 1 gewählt werden, um gute Ergebnisse zu erzielen.

5.2 Umströmte Kugel: Geschwindigkeitspotential

Bei der Herleitung der Wellengleichung wurde darauf hingewiesen, daß diese Differentialgleichung nicht nur für den Schalldruck als führender Feldgröße gilt, sondern auch für das Geschwindigkeitspotential. Demzufolge kann das Rechenprogramm auch für die Berechnung des Geschwindigkeitspotentialfelds eingesetzt werden. Die Verwendung der Potentialformulierung hat dann Vorteile, wenn in erster Linie das Geschwindigkeitsfeld des Fluids von Interesse ist, also zur Untersuchung von Strömungsproblemen. Die Geschwindigkeit des Fluids ergibt sich aus dem Gradienten des Geschwindigkeitspotentials, der in einer Nachlaufrechnung bestimmt werden kann. Auch der Schalldruck kann aus dem Geschwindigkeitspotential berechnet werden, und zwar durch Differenzieren nach der Zeit.

Hier soll nur kurz das Beispiel einer umströmten Kugel angesprochen werden, für das bei kleinen Machzahlen ($M^2 \ll 1$) eine analytische Lösung bekannt ist [50]. Das Potentialfeld einer Oberfläche, die sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt, ist gleich dem Potentialfeld einer stationären Kugel, die sich in einer gleichförmigen Strömung befindet. Die Strömungsgeschwindigkeit entspricht dabei der negativen Geschwindigkeit der Kugel. An diesem Beispiel wird der Einfluß des konvektiven Terms auf die *Amplitude* eines Schallfelds auf dem Rand und im Außenraum verdeutlicht. Dopplereffekte entstehen erst bei dynamischer Anregung und müssen an einem weiteren Beispiel untersucht werden.

Es sei ausdrücklich erwähnt, daß es aufgrund der zwar geringen, aber für dieses Beispiel nicht zu vernachlässigenden Viskosität eines gasförmigen Mediums wie Luft, bei den hier angenommenen Geschwindigkeiten zu Ablösungen des Strömungsfelds und damit zu Unstetigkeiten im Geschwindigkeitspotentialfeld kommt. Eine laminare Strömung, die Voraussetzung für die Anwendung der linearen Theorie ist, würde sich nicht einstellen. Dennoch kann dieses Beispiel Hinweise auf den Einfluß des konvektiven Terms in der Differentialgleichung und auf die Richtigkeit des verwendeten Algorithmus geben.

Der Kugelrand wird als nicht durchlässig angenommen. Das bedeutet für ein auf der Kugeloberfläche befindliches Fluidteilchen, daß seine Geschwindigkeit in Normalenrichtung gleich der Normalengeschwindigkeit der Kugeloberfläche ist. Die Geschwindigkeit ist wiederum der Gradient des Geschwindigkeitspotentials, so daß sich folgende Randbedingung ergibt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}_0 = cM_n \tag{5.1}$$

Bei einer konstanten Geschwindigkeit der Kugel in Richtung der x_1-Achse durch ein ruhendes Medium stellt sich ein stationärer Zustand ein, wenn man als Bezugssystem ein mit der Kugel mitbewegtes Koordinatensystem wählt. In diesem Koordinatensystem erfüllt das Geschwindigkeitspotential die Differentialgleichung

$$\nabla^2 \phi - (M_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^2 \phi = 0\,. \tag{5.2}$$

Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der Gleichung (3.1), bei dem die Zeitableitungen verschwinden. Wählt man ${M_1}^2 \ll 1$ kann man unter Vernachlässigung des konvektiven Terms der Differentialgleichung näherungsweise mit der LAPLACEschen Differentialgleichung rechnen. Die Geschwindigkeit der Kugel taucht dann nur in der Randbedingung auf. Die Lösung für diesen Fall lautet [50]:

$$\phi = v_0 x_1 \frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^3}\,, \tag{5.3}$$

wie man durch Einsetzen in LAPLACEsche Differentialgleichung und Randbedingung (5.1) leicht verifizieren kann. In der Literatur findet man häufig die Formulierung mit stationärer Kugel und bewegtem Medium. In diesem Fall wäre zu obigem Geschwindigkeitspotential ein Anteil $v_0 x_1$ für die Parallelströmung dazuzuaddieren.

In den Abbildungen 5.8 und 5.9 wird die exakte Lösung der stationären Wellengleichung mit der Näherungslösung des Programms verglichen. Angegeben ist die Näheungslösung für das Geschwindigkeitspotential auf der x_1-Achse mit und ohne Berücksichtigung des konvektiven Terms der Differentialgleichung. Die Zeitschrittweite wurde sehr groß gewählt, um die statische Lösung des Problems zu erhalten. Wie erwartet liegen beide Näherungslösungen bei einer Geschwindigkeit von $M = 0.2$ (dies entspricht einer Geschwindigkeit von ca 250 km/h in Luft) dicht beieinander. Das bedeutet aber nicht, daß der konvektive Term der Differentialgleichung bei dieser Geschwindigkeit generell vernachlässigbar sind. Da bei diesem Beispiel keine schwingungsmäßige Schallerregung vorhanden ist, kann beispielsweise über die Dopplereffekte noch keine Aussage gemacht werden. Bei einer Geschwindigkeit von $M = 0.5$ hat der konvektive Term der Differentialgleichung einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß, wie man in Abbildung 5.9 erkennt.

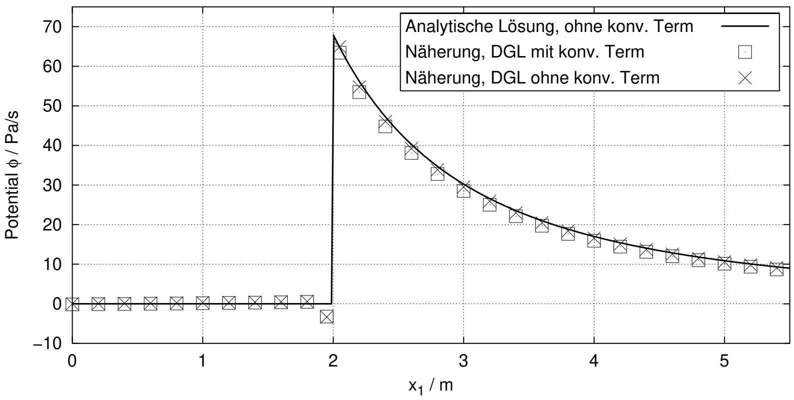


Abbildung 5.8: *Geschwindigkeitspotential einer umströmten Kugel auf der* x_1-*Achse,* $M = 0.2$

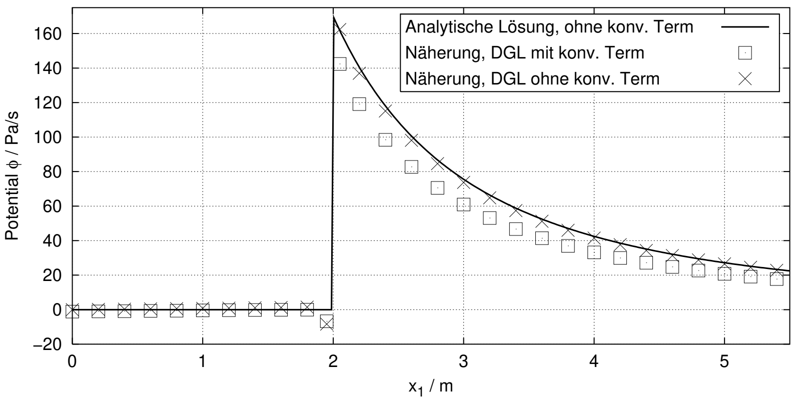


Abbildung 5.9: *Geschwindigkeitspotential einer umströmten Kugel auf der* x_1-*Achse,* $M = 0.5$

5.3 Sich bewegende Kugel: Schalldruck infolge Punktquelle

Die bisherigen Beispiele zeigen, daß mit dem vorgestellen Verfahren sowohl Schalldruckfelder wie auch Geschwindigkeitspotentialfelder berechnet werden können, die von *stationären* Oberflächen erzeugt werden. Für Beispiele, in denen die konvektiven Terme der Differentialgleichung eine größere Rolle spielen, sind kaum analytische Lösungen bekannt. Es existieren zwar mehrere Arbeiten aus den siebziger Jahren, die sich mit der analytischen Berechnung des Schallfelds einer pulsierenden Kugel in gleichmäßiger Strömung beschäftigen [13], [49], [27]. Diese Lösungen sind jedoch nur Näherungsfunktionen, bei deren Herleitung Annahmen getroffen werden müssen (kleine Geschwindigkeiten / Lösung nur im Fernfeld gültig / kompakte Anregung, d.h. Wellenlänge $\gg$ Kugelradius), die einer Verwendung als Verifikationsbeispiel entgegenstehen.

Die einzige bekannte exakte Lösung der konvektiven Wellengleichung ist die Fundamentallösung. Um das Programm zu testen, müssen allerdings im Schallfeld Ränder vorhanden sein. Um die Punktquelle wird deshalb ein kugelförmiger Rand gelegt. Punktquelle und Kugel bewegen sich mit konstanter Unterschallgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{M}$ geradlinig in x-Richtung, so daß die Punktquelle immer im Mittelpunkt der Kugel bleibt. Es soll ein Außenraumproblem untersucht werden. Deshalb wird der *Schallfluß* auf der Kugeloberfläche infolge der Punktquelle im Innern der Kugel berechnet und als *Randbedingung* für das Außenraumproblem außerhalb der Kugeloberfläche vorgegeben, siehe Abbildung 5.10.

Um die Berechnungen möglichst einfach zu gestalten, wird für die Intensität der Punktquelle die Fundamentallösung verwendet und nicht die Schalldruckverteilung infolge einer Punktquelle wie sie in Gleichung (2.24) hergeleitet wurde. Das Schallfeld in diesem Koordinatenssystem errechnet sich aus der Gleichung

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2 p}{\mathrm{D}t^2} = \sigma = B\sin(\omega t)\delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{0})\,,$$

wenn sich die Punktquelle im Ursprung des bewegten $\boldsymbol{\xi}$-Koordinatensystems befindet. Die analytische Lösung ist mit Gleichung (2.22)

$$p(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{B\sin(\omega(t - R/c))}{4\pi R_1}$$

mit

$$R_1 = \xi\sqrt{1 + {M_\xi}^2 - M^2} \quad \text{und} \quad R = \frac{\xi M_\xi + R_1}{1 - M^2}\,,$$

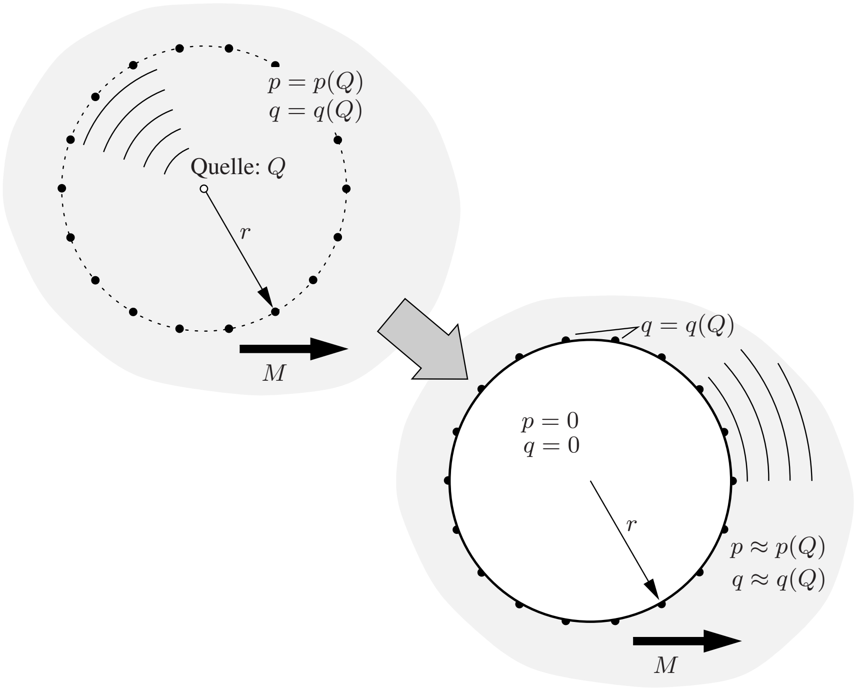


Abbildung 5.10: *Approximation des Schallfelds einer bewegten Punktquelle Q mit Hilfe einer bewegten Kugeloberfläche, deren Randbedingung von der Punktquelle Q bestimmt wird*

sowie $\xi = |\boldsymbol{\xi}|$ und $M_\xi = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi}/\xi$. In einem mitbewegten Koordinatensystem sind R und R_1 zeitunabhängig.

Der Fluß in Richtung eines Einheitsvektors $\boldsymbol{n}$ ist

$$q_n = -\frac{\omega}{c}\frac{B\cos(\omega(t - R/c))}{4\pi R_1}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}R - \frac{B\sin(\omega(t - R/c))}{4\pi {R_1}^2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}R_1 \qquad (5.4)$$

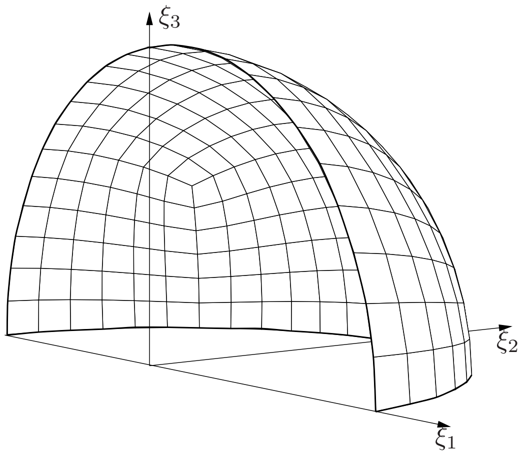
mit

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}R_1 = \frac{\boldsymbol{\xi n}(1-M^2)+\xi M_\xi M_n}{R_1} \qquad \text{und}$$

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}R = \frac{M_n R_1+\boldsymbol{\xi n}(1-M^2)+\xi M_\xi M_n}{R_1(1-M^2)}\,.$$

Der Fluß auf dem Rand gemäß Gleichung (5.4) wird als Randbedingung für das Außenraumproblem verwendet. Mit dem in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Verfahren kann jetzt der *Schalldruck* auf der Kugeloberfläche und im Außenraum berechnet werden. Dieser muß natürlich wiederum mit dem Schalldruck infolge der Punktquelle, ohne den Kugelrand, übereinstimmen.

Man beachte, daß dieses Problem bezüglich der x-Achse, der Richtung des Machvektors, symmetrisch ist. Dies kann im Rechenprogramm ausgenuzt wer-



Radius der Kugel	:	2m
Elemente	:	216
Kollokationspunkte:		241
Machvektor $\boldsymbol{M}$	:	$[M_1,\ 0,\ 0]$

Abbildung 5.11: *Diskretisierte Viertelkugel*

den, indem nur eine Viertelkugel diskretisiert wird und zwei Symmetriebenenen (die ξ_1-ξ_2- und die ξ_1-ξ_3-Ebene) angegeben werden. Damit reduziert sich die Zahl der Unbekannten auf gut ein Viertel der für eine komplett diskretisierte Kugel erforderlichen Anzahl an Unbekannten.

5.3.1 Stationäre Punktquelle

Zunächst kann überprüft werden, ob die Lösung für eine stationäre Schallquelle reproduziert werden kann. In Abbildung 5.12 ist die Schalldruckverteilung für den Punkt [0.70 1.74 0.70] über der Zeit aufgetragen. Man erkennt, daß nach

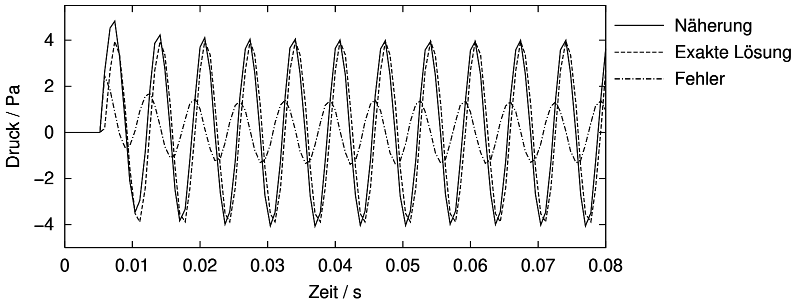


Abbildung 5.12: *Zeitabhängiger Druckverlauf auf der stationären Kugel im Punkt [0.70 1.74 0.70]: Vergleich der Näherungslösung mit dem exakten Verlauf*

einer kurzen Einschwingphase zu Beginn der exakte Druckverlauf bis auf eine Phasenverschiebung gut angenähert wird. Die Phasenverschiebung entsteht dadurch, daß eine Wellenfront auch für Kollokationspunkte Anteile liefert, die zwar die Wellenfront noch nicht erreicht hat, die aber zu Elementen gehören, in die die Wellenfront bereits vorgedrungen ist.

Um einerseits den Wert der Phasenverschiebung der einzelnen Kollokationspunkte zu berechnen und andererseits einen Anhaltspunkt für die Qualität der Randlösung zu erhalten, wird an dieser Stelle eine Fehlernorm – die Spektralnorm E – eingeführt, die folgendermaßen definiert ist:

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{Zs}} (p_i - \hat{p}_i)^2} \, .$$

E ist der über alle Zeitschritte aufsummierte Fehler in einem Kollokationspunkt, wobei $\hat{p}_i$ die Näherungslösung im i-ten Zeitschritt ist. Die exakte Lösung p_i in diesem Punkt ist abhängig von der zu berechnenden Phasenverschiebung $\tilde{t}$ der Näherungslösung gegenüber der exakten Lösung:

$$p_i(\boldsymbol{\xi}_i, t+\tilde{t}) = \frac{B \cdot \sin(\omega[t+\tilde{t}-R/c])}{4\pi R_1}$$

Die Phasenverschiebung der Näherungslösung kann mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren iterativ so berechnet werden, daß die Spektralnorm minimal wird:

$$\tilde{t}_{n+1} = \tilde{t}_n - \frac{\partial E/\partial \tilde{t}}{\partial^2 E/\partial \tilde{t}^2}\,.$$

Die mit der Phasenverschiebung $\tilde{t}$ korrigierte exakte Lösung stimmt mit der Näherungslösung gut überein, wie aus Abbildung 5.13 hervorgeht.

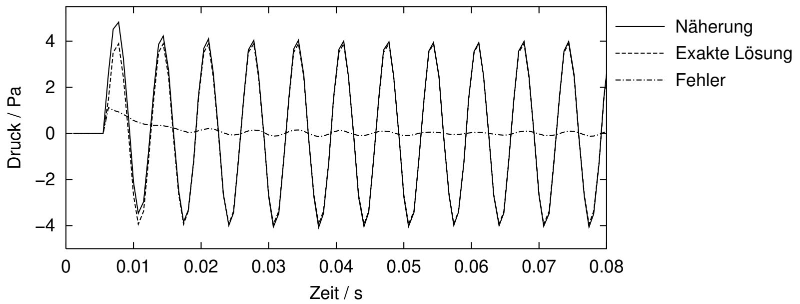


Abbildung 5.13: *Zeitabhängiger Druckverlauf auf der stationären Kugel im Punkt [0.70 1.74 0.70] mit phasenverschobener exakter Lösung*

5.3.2 Bewegter Rand

Bei einer stationären Punktquelle ist das Schallfeld radialsymmetrisch, so daß bei einem beliebigen Last-Zeit-Gesetz für die Punktquelle der Schalldruck auf der Kugeloberfläche zu einem festen Zeitpunkt konstant ist. Bei bewegter Schallquelle entsteht ein achsensymmetrisches Schallfeld, wobei die Symmetrieachse durch die Bahn der Punktquelle gegeben ist. Auf der Kugeloberfläche entsteht somit eine Welligkeit des Schallfelds: je größer die Geschwindigkeit ist, desto mehr Wellen müssen von der Diskretisierung auf der Kugeloberfläche dargestellt werden.

Kleiner Zeitschritt, langsamer Rand

Zuerst werden Machzahlen von 0.3 bis 0.5 vorgegeben. $M = 0.5$ entspricht einer Geschwindigkeit von etwa 612km/h in Luft. Bei einer Diskretisierung der Viertelkugel mit 216 Viereckselementen, einer Zeitschrittweite von 7.4074e-04s und einer Periode von neun Zeitschritten für die Anregung (150Hz) ergeben sich Näherungslösungen, die in Abbildung 5.15 für den 34. Zeitschritt dargestellt sind. Aufgetragen ist der Schalldruck in allen Kollokationspunkten in Abhängigkeit vom Winkel γ der vom Ortsvektor des Kollokationspunkts und der Bewegungsrichtung der Punktquelle eingeschlossen wird (siehe Abbildung 5.14).

Die Übereinstimmung der Näherungslösung mit der exakten Lösung ist recht gut, wobei die exakten Lösungen phasenverschoben dargestellt sind.

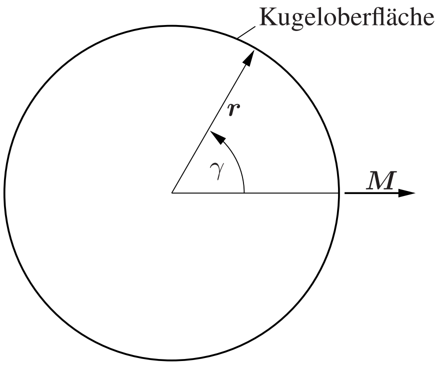


Abbildung 5.14: *Der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ und dem Machvektor $\boldsymbol{M}$*

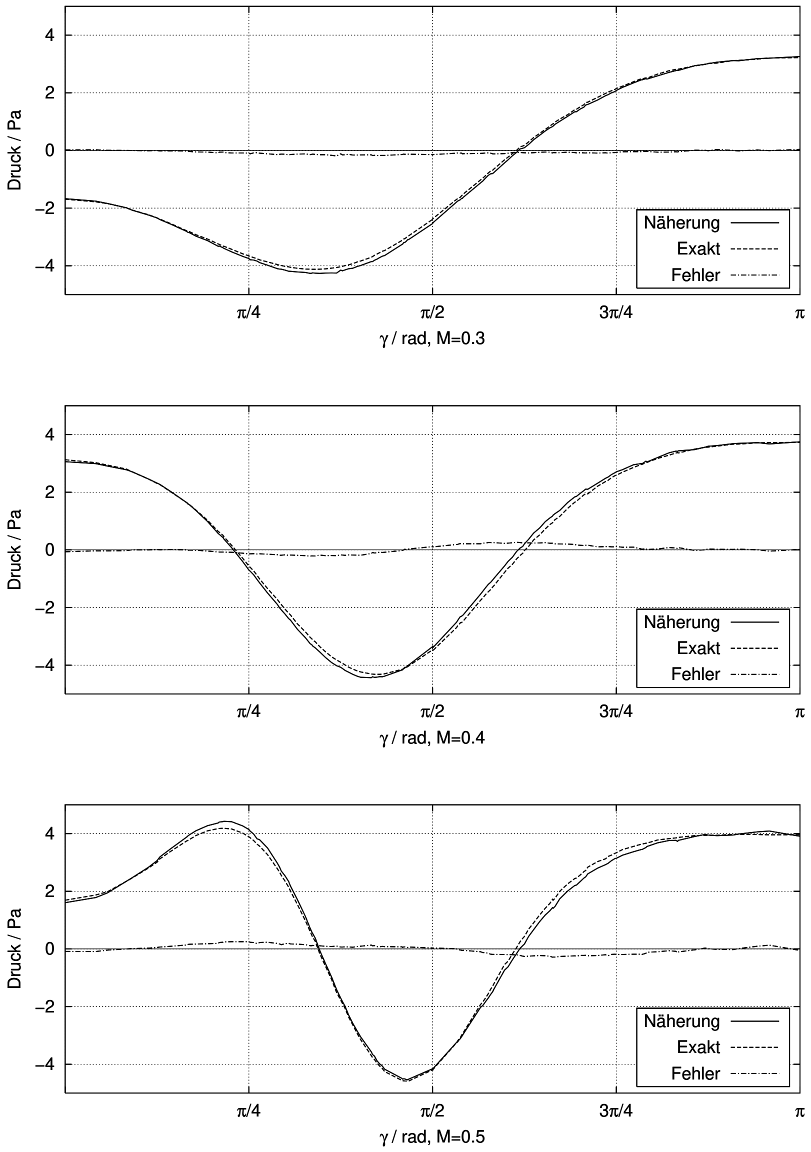


Abbildung 5.15: *Schalldruckverlauf auf der Kugeloberfläche im Zeitschritt 34 für Geschwindigkeiten von* $M = 0.3$*,* $M = 0.4$*,* $M = 0.5$

In Abbildung 5.16 ist die Phasenverschiebung der einzelnen Kollokationspunkte bezogen auf die Zeitschrittlänge sowie die Fehlernorm E aufgetragen. Auch diese Kurven weisen für den bewegten Rand eine Welligkeit auf, die sich qualitativ dem Verlauf der Randlösung anpaßt. In allen vier Fällen beträgt die Phasenverschiebung etwa eine halbe Zeitschrittlänge. Der gemittelte Fehler ist für kleinere Geschwindigkeiten sogar geringer als beim stationären Rand.

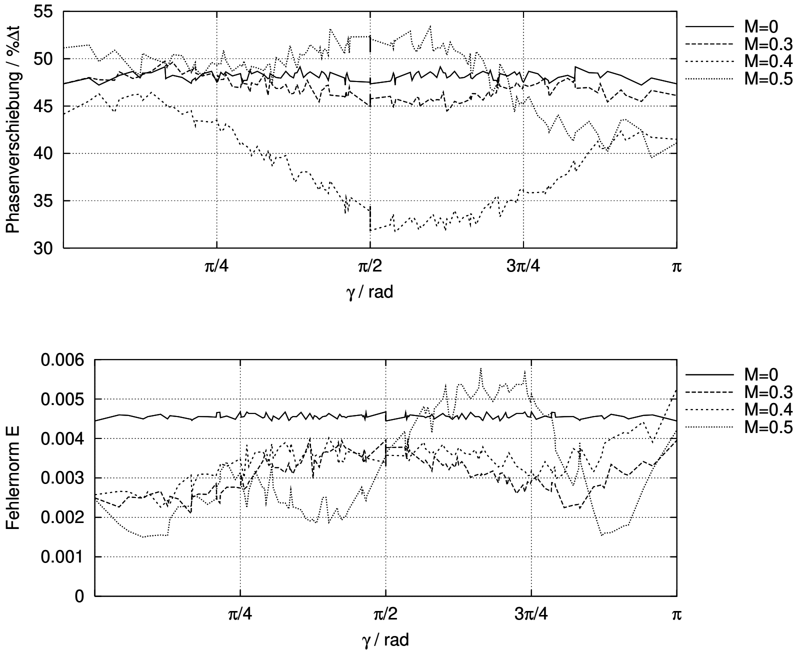


Abbildung 5.16: *Phasenverschiebung und Fehlernorm auf der Kugeloberfläche für Geschwindigkeiten von* $M = 0$ *bis* $M = 0.5$

Der β-Wert beträgt bei diesem Beispiel 1.04. Die Aussage, daß in einem Zeitschritt dabei die 1.04-fache durchschnittliche Elementlänge von einer Welle überstrichen wird, trifft bei bewegten Rändern nicht mehr überall zu, da die Welle im mitbewegten Koordinatensystem in Bewegungsrichtung langsamer vorankommt als in entgegengesetzter Richtung. Im vorderen Bereich der Kugel (bei einem

Winkel kleiner $\pi/2$) erhalten wir somit kleinere β-Werte, im hinteren Bereich dagegen größere.

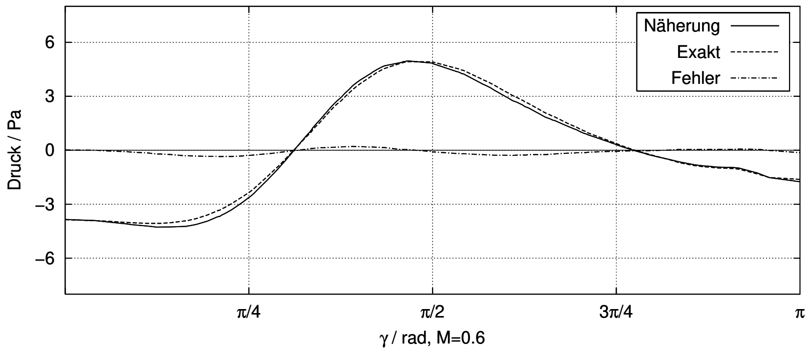
Um bei größeren Geschwindigkeiten die Welligkeit der Randlösung besser approximieren zu können, erscheint es zunächst sinnvoll, die Diskretisierung im vorderen Bereich der Kugel zu verfeinern und im hinteren Bereich zu vergröbern. Die führt jedoch eher zu einer Verschlechterung des Ergebnisses, weil die Wellenfront im hinteren Bereich sehr schnell über die Elemente hinwegstreicht. Der β-Wert wird hier sehr groß, was wiederum zu starker numerischer Dämpfung führt. Die besten Ergebnisse werden auch bei großen Geschwindigkeiten mit einer gleichmäßigen Diskretisierung der gesamten Kugel erzielt.

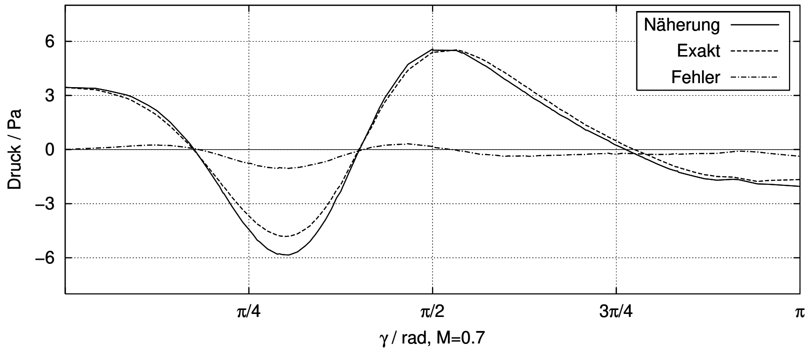
Großer Zeitschritt, schneller Rand

Offenbar liefert das Verfahren für die bisher angenommenen Geschwindigkeiten von maximal 170m/s recht genaue Ergebnisse. Es ist noch zu prüfen, bei welchen Geschwindigkeiten das Verfahren an seine numerischen Grenzen stößt. Folgende Schwierigkeiten sind zu erwarten:

- Bei Geschwindigkeiten in der Nähe der Schallgeschwindigkeit kann der Dopplerfaktor $(1 - M_R)$ Werte nahe Null annehmen, was zu numerischen Schwierigkeiten führt, da dieser Faktor teilweise in dritter Potenz im Nenner der Integralkerne auftaucht.
- Die Schallwellen breiten sich im mitbewegten Koordinatensystem in Bewegungsrichtung wesentlich langsamer aus, als in die entgegengesetzte Richtung. Dies führt in den vorn gelegenen Teilen des Rands zu einer extremen Welligkeit der Lösung auch bei niederfrequenter Anregung. Um diese Welligkeit modellieren zu können, ist eine sehr feine Diskretisierung erforderlich.
- Ein Signal braucht sehr lange, um vom hinteren Teil des Rands an seine Vorderspitze zu gelangen. Bezogen auf den bewegten Rand kommt es nur mit der Differenz aus Schallgeschwindigkeit und Bewegungsgeschwindigkeit vorwärts. Das bedeutet, daß über einen langen Zeitraum, d.h. viele Zeitschritte, integriert werden muß, was sowohl rechenzeit- als auch speicherintensiv ist.

Wird die Geschwindigkeit der Punktquelle weiter erhöht, muß entweder die Ortsdiskretisierung der Kugel verfeinert oder die Anregungsfrequenz der Punktquelle verkleinert werden, damit die Randlösung auf der Kugel dargestellt werden kann. Hier wurde, um Rechenzeit und Speicherplatz zu sparen, eine Verringerung der Anregungsfrequenz auf 75Hz, d.h. die Hälfte des vorigen Werts, vorgenommen, indem die Zeitschrittweite verdoppelt wurde. Die Anzahl der Zeitschritte pro Schwingungsdauer bleibt konstant. Um mit einer Verfeinerung der Ortsdiskretisierung den gleichen Effekt (d.h. die gleiche Anzahl von Elementen für eine Schwingungsperiode) zu erreichen, wäre eine Vervierfachung der Elementanzahl, und damit der Zahl der Unbekannten, erforderlich. Dargestellt wird wiederum die Randlösung aller Kollokationspunkte.





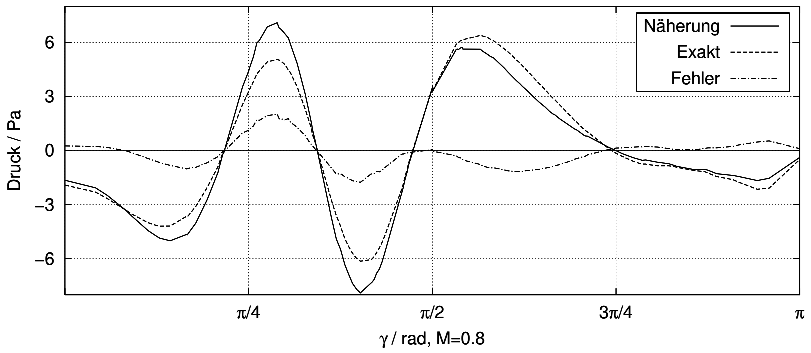


Abbildung 5.17: *Schalldruckverlauf auf der Kugeloberfläche im Zeitschritt 34 für Geschwindigkeiten von* $M = 0.6$*,* $M = 0.7$*,* $M = 0.8$

Bei Geschwindigkeiten größer als $M = 0.6$ treten deutliche Abweichungen der Näherungslösung von den exakten Kurvenverläufen auf. Die Ungenauigkeiten bleiben auch bei erhöhter Gaußpunktzahl erhalten. Eine Verfeinerung der Orts- und Zeitdiskretisierung bei $M = 0.8$ bringt ebenfalls keine entscheidende Verbesserung der Ergebnisse.

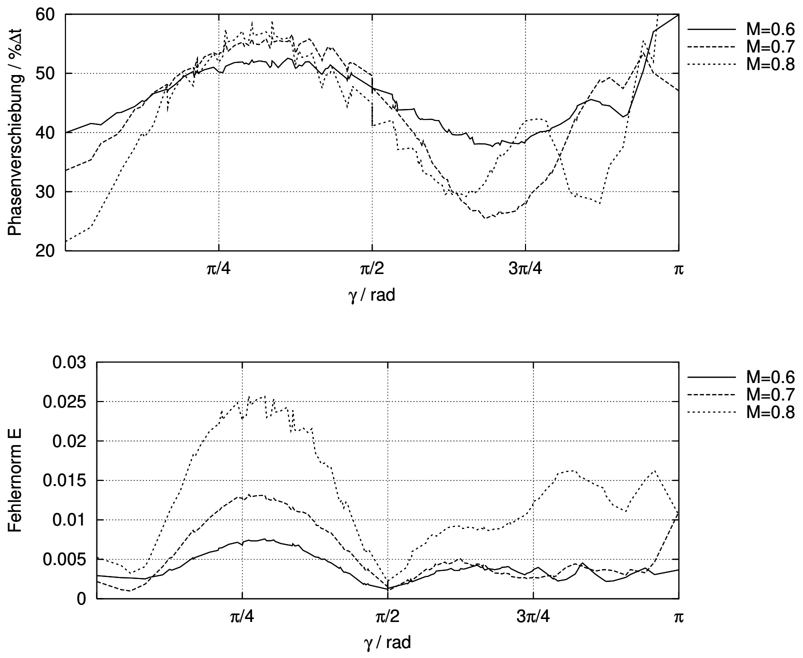


Abbildung 5.18: *Phasenverschiebung und Fehlernorm auf der Kugeloberfläche für Geschwindigkeiten von* $M = 0.6$ *bis* $M = 0.8$

Eine Beschränkung der Geschwindigkeit auf Werte von maximal $M = 0.6$ stellt für die Anwendbarkeit des Verfahrens auf praxisrelevante Problemstellungen allerdings keine Einschränkung dar, weil selbst bei Hochgeschwindigkeitsverkehrsmitteln wie etwa der Magnetschwebebahn auf absehbare Zeit Geschwindigkeiten von 730km/h kaum erreicht werden können. Selbst landende Passagierflugzeuge liegen noch im Bereich der Geschwindigkeiten, die mit diesem Verfahren untersucht werden können.

5.3.3 Druckverteilung im Außenraum

Sobald Schallfluß und Schalldruck auf dem Rand bekannt sind, kann der Schalldruck im Außenraum berechnet werden, indem der Kollokationspunkt (Beobachter) in die Außenpunkte gelegt und die Gleichung (4.3) ausgewertet wird. Die Außenpunkte bewegen sich in diesem Beispiel mit der gleichen Geschwindigkeit wie der kugelförmige Rand. In Abbildung 5.19 das Schallfeld in der x_1-x_2-Ebene dargestellt. Die x_1-Achse, in deren Richtung sich die Kugel bewegt, zeigt nach oben. Man erkennt sehr gut den Dopplereffekt, d.h. das Zusammenschieben der Welle in Ausbreitungsrichtung. Als Geschwindigkeit wurde M=0.5 gewählt.

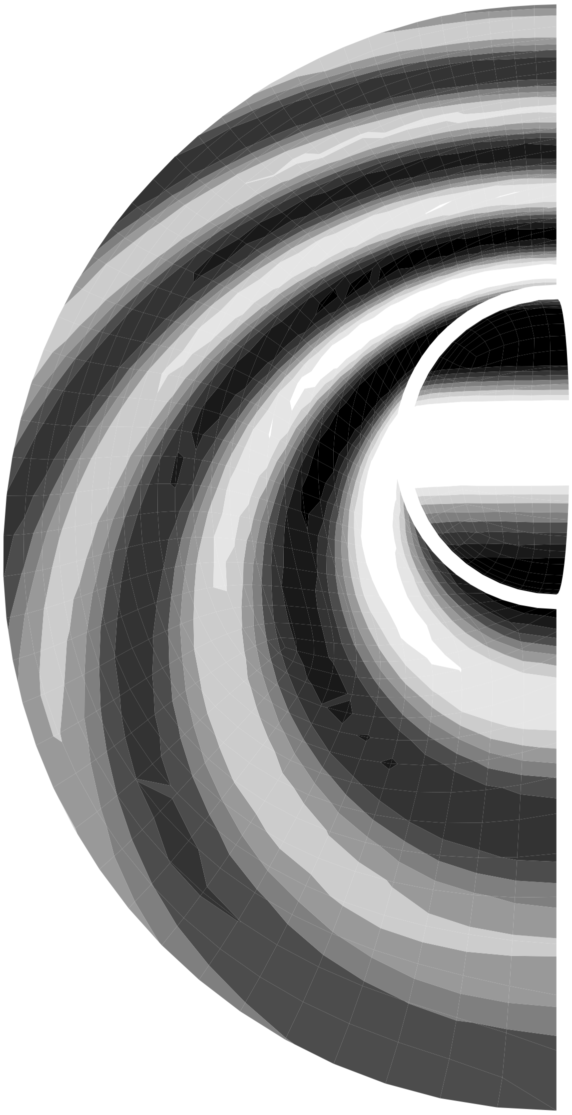


Abbildung 5.19: *Sich bewegende Kugel: Schalldruckverteilung im Außenraum bei einer Geschwindigkeit der Kugel von* $M = 0.5$

6 Erweiterung der Formulierung auf mehrere Ränder

Mit der bisher vorgestellten Methode läßt sich die Schallabstrahlung eines einzelnen Rands berechnen, der sich mit konstanter Unterschallgeschwindigkeit bewegt. Man erhält mit den Randbedingungen unter einer näherungsweisen Lösung der Randintegralgleichung die unbekannten Randwerte sowie den Schalldruck in Außenpunkten, die sich mit gleicher Geschwindigkeit wie der fahrende Rand bewegen. Ein Anwendungsfall wäre beispielsweise ein in großer Höhe fliegendes Flugzeug. Dieses Problem läßt sich übrigens bei harmonischer Anregung auch im Frequenzbereich lösen, da sich in einem mitbewegten Koordinatensystem ein stationärer Zustand einstellt. Für die eigentlich interessanten Problemstellungen, bei denen sich mehrere Ränder mit verschiedenen Geschwindigkeiten gegenseitig beeinflussen – wie zum Beispiel an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Autos – ist die bisherige Formulierung nicht ausreichend. Sie wird deshalb in diesem Abschnitt entsprechend erweitert.

6.1 Der sich unabhängig bewegende Beobachter

Der Schritt von einem bewegten Rand zu mehreren bewegten Rändern besteht darin, den Kollokationspunkt – also den Beobachter – nicht wie bisher in einen Punkt zu legen, der sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, wie die Quellenbelegung auf dem Rand, über den integriert wird, sondern in einen Punkt, der sich mit einer anderen Geschwindigkeit bewegt. Dieser Schritt ist wesentlich leichter zu vollziehen, als der Schritt von einem stationären Rand zu einem bewegten Rand, da sich sämtliche Integrationen und Operatoren auf die Quellkoordinaten beziehen.

Für den vom Schall zurückgelegten Weg $\boldsymbol{R}$ ergibt sich nach Abbildung 6.1:

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{\xi}_0\Big|_{t=0} + \boldsymbol{v}_B t + \boldsymbol{\xi} - \Big(\boldsymbol{\eta}_0\Big|_{t=0} + \boldsymbol{v}_Q(t - R/c) + \boldsymbol{\eta}\Big) \ .$$

Durch die Terme, die für die Bewegung des Beobachters neu hinzukommen —

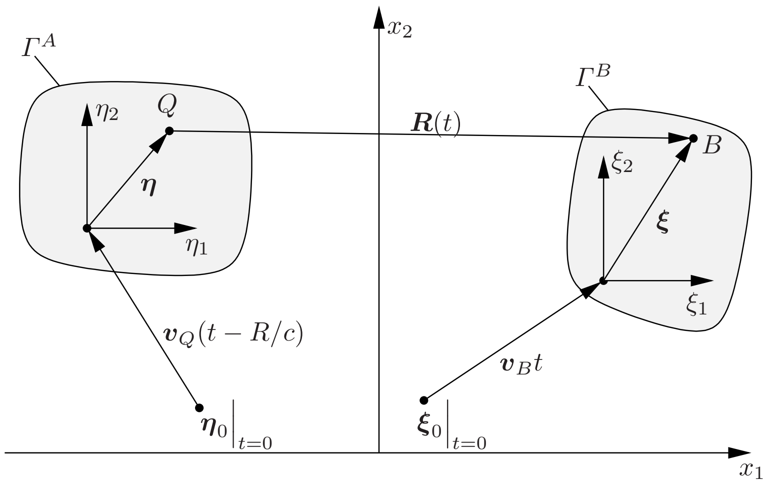


Abbildung 6.1: *Kinematik des unabhängig bewegten Beobachters: Zeitabhängigkeit des Vektors $\boldsymbol{R}$*

$\boldsymbol{\xi}_0\big|_{t=0}$ und $\boldsymbol{v}_B t$ —, entstehen bei der Herleitung der Randintegralgleichung keine zusätzlichen Terme, da die Differentiationen von $\boldsymbol{R}$ nach der Koordinate $\boldsymbol{\eta}$ und der Emissionszeit τ erfolgen. Damit ist die bisher benutzte Randintegralgleichung (3.12) auch auf mehrere unabhängig voneinander bewegte Ränder anwendbar.

6.2 Auswirkungen auf das Gleichungssystem

Die Auswirkungen auf den Rechenalgorithmus lassen sich am besten anhand des Matrizenschemas studieren, das in Kapitel 4 für einen einzelnen bewegten Rand besprochen wurde.

Betrachtet wird ein Gleichungssystem für vier Zeitschritte und zwei unabhängige Ränder Γ^A, Γ^B, siehe Abbildung 6.1. Die Spalten der Matrizen $\mathbf{H}$ und $\mathbf{G}$ sind gemäß den Randbedingungen in die Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ einsortiert, so daß wir analog zur Gleichung (4.11) das Hypermatrizenschema

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u} = \mathbf{R}\boldsymbol{b} + \hat{\boldsymbol{r}}$$

mit den bekannten Randwerten $\boldsymbol{b}$ und den Unbekannten $\boldsymbol{u}$ erhalten. Die Hypermatrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ sind unterteilt in Submatrizen $\mathbf{L}_{ij}$ und $\mathbf{R}_{ij}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & & & \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & & \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} & \\ \mathbf{L}_{41} & \mathbf{L}_{42} & \mathbf{L}_{43} & \mathbf{L}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & & & \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & & \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \\ \mathbf{R}_{41} & \mathbf{R}_{42} & \mathbf{R}_{43} & \mathbf{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{r}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{r}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{r}}_4 \end{bmatrix} .$$

Der Index i der Matrix $\mathbf{L}_{ij}$ bezeichnet den Beobachtungszeitschritt, j steht für den Emissionszeitschritt. Diese Submatrizen sind noch einmal für die beiden Ränder Γ^A und Γ^B unterteilt. Für die Hypermatrix $\mathbf{L}$ ergibt sich beispielsweise:

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} \mathbf{L}_{11}^{AA} & \mathbf{L}_{11}^{AB} & & & & & & \\ \mathbf{L}_{11}^{BA} & \mathbf{L}_{11}^{BB} & & & & & & \\ \hdashline \mathbf{L}_{21}^{AA} & \mathbf{L}_{21}^{AB} & \mathbf{L}_{22}^{AA} & \mathbf{L}_{22}^{AB} & & & & \\ \mathbf{L}_{21}^{BA} & \mathbf{L}_{21}^{BB} & \mathbf{L}_{22}^{BA} & \mathbf{L}_{22}^{BB} & & & & \\ \hdashline \mathbf{L}_{31}^{AA} & \mathbf{L}_{31}^{AB} & \mathbf{L}_{32}^{AA} & \mathbf{L}_{32}^{AB} & \mathbf{L}_{33}^{AA} & \mathbf{L}_{33}^{AB} & & \\ \mathbf{L}_{31}^{BA} & \mathbf{L}_{31}^{BB} & \mathbf{L}_{32}^{BA} & \mathbf{L}_{32}^{BB} & \mathbf{L}_{33}^{BA} & \mathbf{L}_{33}^{BB} & & \\ \hdashline \mathbf{L}_{41}^{AA} & \mathbf{L}_{41}^{AB} & \mathbf{L}_{42}^{AA} & \mathbf{L}_{42}^{AB} & \mathbf{L}_{43}^{AA} & \mathbf{L}_{43}^{AB} & \mathbf{L}_{44}^{AA} & \mathbf{L}_{44}^{AB} \\ \mathbf{L}_{41}^{BA} & \mathbf{L}_{41}^{BB} & \mathbf{L}_{42}^{BA} & \mathbf{L}_{42}^{BB} & \mathbf{L}_{43}^{BA} & \mathbf{L}_{43}^{BB} & \mathbf{L}_{44}^{BA} & \mathbf{L}_{44}^{BB} \end{array}\right] .$$

Der Index A der Matrix $\mathbf{L}_{ij}^{AB}$ steht für den Rand, zu dem der Kollokationspunkt gehört, B steht für den Rand des Quellpunkts. Die Hauptdiagonalblöcke $\mathbf{L}_{ij}^{AA}$ und $\mathbf{L}_{ij}^{BB}$ sind quadratisch und enthalten die Einflüsse der Feldpunkte eines Randes auf seine eigenen Kollokationspunkte. Diese Blöcke können wie bisher berechnet werden. Sie sind auch nach wie vor gleich bei gleicher Differenz $i - k$ von Beobachtungs- und Emissionszeitschritt. Die Nebendiagonalblöcke

$\mathbf{L}_{ij}^{AB}$ und $\mathbf{L}_{ij}^{BA}$ enthalten hingegen die Einflüsse verschiedener Ränder aufeinander. Der Abstand zweier Punkte ist hier in der Zeit nicht mehr konstant, daher sind auch zwei Matrizen $\mathbf{L}_{ij}^{AB}$ bei konstanter Differenz $i - j$ nicht mehr gleich.

Dies hat zur Folge, daß es nicht mehr sinnvoll ist, diese Matrizen vorab zu berechnen und abzuspeichern, weil sie ja nur einmal gebraucht werden. In jedem Zeitschritt müssen alle Nebendiagonalblöcke der $\mathbf{R}_{ij}$- und $\mathbf{L}_{ij}$-Matrizen neu integriert werden. Dies führt natürlich zu einem erheblichen Anstieg des Rechenzeitbedarfs. Andererseits wird Speicherplatz gespart.

Wenn der kürzeste Abstand zwischen zwei Rändern zu allen Zeitpunkten kleiner ist, als der Weg, den eine Wellenfront in einem Zeitschritt zurücklegt, sind die Nebendiagonalblöcke der zu zerlegenden Matrizen $\mathbf{L}_{ii}$ Nullmatrizen. Das bedeutet, daß nach wie vor nur *eine* Matrix zerlegt werden muß, die zudem bei n Rändern aus n entkoppelten Blöcken besteht, die jeweils unabhängig voneinander zerlegt werden können. Die Einflüsse der Ränder untereinander sind in diesem Fall ausschließlich in der rechten Seite enthalten.

Der Weg, den die Wellenfront in einem Zeitschritt zurücklegt, sollte im Hinblick auf die Stabilitätskriterien, die in Kapitel 5.1 aufgestellt wurden, von der Größenordnung einer durchschnittlichen Elementabmessung sein. Bei einer recht niedrigen Frequenz von 100Hz und sechs Elementen pro Wellenlänge ist dies eine Länge von 57cm. Dieser Wert ist zwar kleiner als der übliche horizontale Abstand zwischen verschiedenen Verkehrmitteln und angrenzenden Bauwerken, aber sicherlich größer, als der Abstand eines Kraftfahrzeugs zur Fahrbahnoberfläche oder eines Zuges zum Gleiskörper. In vielen Anwendungsfällen kann jedoch die Fundamentallösung für einen Halbraum verwendet werden, die den Vorteil hat, daß dessen Oberfläche nicht diskretisiert werden muß, siehe Abschnitt 2.8. Weil sich ein an der Halbraumoberfläche gespiegelter Kollokationspunkt eines Autos mit der gleichen Geschwindigkeit wie die reale Oberfläche bewegt, können realer und gespiegelter Rand als *eine* Oberfläche angesehen werden. Damit kann ein bewegter Rand der Halbraumoberfläche beliebig nahe kommen, ohne daß sich die zu zerlegende Matrix ändert.

Wie sich im nächsten Kapitel herausstellen wird, ist die Berechnung realistischer Beispiele auch im Hinblick auf die benötigte Rechenzeit und Speicherkapazität zur Zeit nur dann möglich, wenn die Fundamentallösung für den Halbraum verwendet wird und so auf eine Diskretisierung der Halbraumoberfläche verzichtet werden kann.

Zusammengefaßt ergibt sich das folgende Schema, das hier exemplarisch an der **L**-Matrix verdeutlicht ist:

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
\mathbf{L}_0^{AA} & 0 & & & & & & \\
0 & \mathbf{L}_0^{BB} & & & & & & \\
\hdashline
\mathbf{L}_1^{AA} & \mathbf{L}_{21}^{AB} & \mathbf{L}_0^{AA} & 0 & & & & \\
\mathbf{L}_{21}^{BA} & \mathbf{L}_1^{BB} & 0 & \mathbf{L}_0^{BB} & & & & \\
\hdashline
\mathbf{L}_2^{AA} & \mathbf{L}_{31}^{AB} & \mathbf{L}_1^{AA} & \mathbf{L}_{32}^{AB} & \mathbf{L}_0^{AA} & 0 & & \\
\mathbf{L}_{31}^{BA} & \mathbf{L}_2^{BB} & \mathbf{L}_{32}^{BA} & \mathbf{L}_1^{BB} & 0 & \mathbf{L}_0^{BB} & & \\
\hdashline
\mathbf{L}_3^{AA} & \mathbf{L}_{41}^{AB} & \mathbf{L}_2^{AA} & \mathbf{L}_{42}^{AB} & \mathbf{L}_1^{AA} & \mathbf{L}_{43}^{AB} & \mathbf{L}_0^{AA} & 0 \\
\mathbf{L}_{41}^{BA} & \mathbf{L}_3^{BB} & \mathbf{L}_{42}^{BA} & \mathbf{L}_2^{BB} & \mathbf{L}_{43}^{BA} & \mathbf{L}_1^{BB} & 0 & \mathbf{L}_0^{BB}
\end{array}\right].$$

Der einzelne Index der Matrizen $\mathbf{L}_h^{AA}$ und $\mathbf{L}_h^{BB}$ steht für die Differenz $i - j$.

Für n unterschiedlich bewegte Ränder errechnet sich der Unbekanntenvektor des Rands k im i-ten Zeitschritts wie folgt:

$$\boldsymbol{u}_i^k = \left[\mathbf{L}_0^{kk}\right]^{-1} \cdot \left[\hat{\boldsymbol{r}}_i^k + \mathbf{R}_0^{kk}\boldsymbol{b}_i^k + \sum_{j=1}^{i-1}\left(-\mathbf{L}_j^{kk}\boldsymbol{u}_{i-j}^k - \sum_{l=1}^{n,l\neq k}\left\{\mathbf{L}_{i(i-j)}^{kl}\boldsymbol{u}_{i-j}^l\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathbf{R}_j^{kk}\boldsymbol{b}_{i-j}^k + \sum_{l=1}^{n,l\neq k}\left\{\mathbf{R}_{i(i-j)}^{kl}\boldsymbol{b}_{i-j}^l\right\}\right)\right]. \quad (6.1)$$

7 Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden einige komplexere Anwendungsbeispiele untersucht. Am Beispiel eines durch eine Unterführung hindurchfahrenden Schnellzugs wird die Interaktion zweier unabhängig bewegter Ränder aufeinander demonstriert, während in einem weiteren Beispiel das Schallfeld zweier aneinander vorbeifahrender Pkw an einer Schallschutzmauer untersucht wird.

In der Akustik ist es üblich, zur Beschreibung eines Schallfelds ein logarithmisches Maß zu verwenden. Man findet häufig die Darstellung des Schalldruckpegels, der vom Effektivwert des Schalldrucks abhängig ist. Während dieser im Frequenzbereich leicht aus den Ergebnissen für den Schalldruck ermittelt werden kann, stößt man hierbei im Zeitbereich auf Schwierigkeiten, weil für die Berechnung des Effektivwerts zunächst das Frequenzspektrum berechnet werden muß. Hier wird deshalb eine alternative Größe eingeführt, indem die Maximalwerte des Schalldrucks statt der Effektivwerte zur Ermittlung einer logarithmischen Kenngröße L verwendet werden: $L = 20\log(p/p_0)$db*. Für den Bezugsschalldruck p_0 wird der Hörschwellenschalldruck von $2 \cdot 10^{-5}$ Pa verwendet. Den Maximalwert des Schalldrucks in einem Punkt erhält man im Zeitbereich, indem man den Maximalwert des Schalldrucks in einem gewissen Zeitraum, also über mehrere Zeitschritte hinweg, ermittelt.

7.1 Hochgeschwindigkeitszug

Als erstes Beispiel wird ein Hochgeschwindigkeitszug betrachtet, der mit einer Geschwindigkeit von 367 km/h durch eine Unterführung hindurchfährt. Der Zug hat eine Länge von 46 m und eine Querschnitt von 2.6 m $\times$ 3.0 m. Die lichte Weite der Unterführung beträgt 5.6 m $\times$ 7.0 m, die Länge 9.8 m. In insgesamt 10 Knoten im Abstand von 10 m entlang der Unterkante des Zuges wird der Schalldruck zu $q = 5\sin(516.6t)$ vorgegeben, in etwa dort, wo sich die Drehgestelle befinden. Die an diese Knoten angrenzenden Elemente tragen zur Schallemission bei. Die Situation ist in Abbildung 7.1 im Grundriß dargestellt.

Bei einer schon recht niedrigen Anregungsfrequenz von 81 Hz ergibt sich ei-

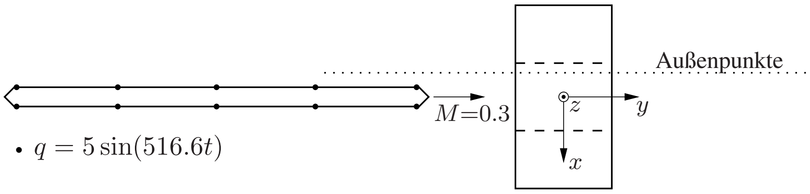


Abbildung 7.1: *Grundriß: Zug mit Unterführung*

ne Wellenlänge von 4.25 m. Pro Wellenlänge sind wiederum mindestens sechs lineare Elemente notwendig, was zu einer Elementlänge von maximal 0.7 m führt. Wollte man den gesamten Schnellzug mit der Unterführung diskretisieren, wären dafür bei linearen Viereckselementen und einer zu diskretisierenden Fläche von 925 m^2 etwa 4000 Elemente mit ebensovielen Knoten erforderlich. Dies übersteigt die zur Verfügung stehende Rechenleistung (Pentium II, 400 MHz, 128 MB RAM) bei weitem, so daß ein symmetrisches Problem gewählt wird, um die Zahl der Unbekannten zu halbieren. Damit die Halbraumoberfläche nicht diskretisiert werden muß, wird in diesem und im folgenden Beispiel die Fundamentallösung für den Halbraum verwendet, was eine Spiegelung des Schallfelds an der Halbraumoberfläche erfordert.

In den Abbildungen 7.2 und 7.3 ist die Durchfahrt des Zuges durch die Unterführung in chronologischer Reihenfolge dargestellt. Im linken Bild von Abbildung 7.2 ist die Vorderspitze des Zuges gerade wieder aus der Unterführung herausgetreten. Man erkennt, wie sich bei der Durchfahrt des Zugs innerhalb der Unterführung eine stehende Welle aufbaut. Dabei tritt in Fahrtrichtung des Zugs mehr Schall aus der Unterführung heraus, als in die entgegengesetzte Richtung; der Zug zieht die Wellen gleichsam aus dem Tunnel heraus. Sobald das Zugende in den Tunnel eintritt, treten aus dem hinteren Tunnelende verstärkt Wellen in rückwärtige Richtung aus. Die größten Amplituden werden jedoch erreicht, wenn der Zug vollständig aus dem Tunnel herausgefahren ist. In Abbildung 7.3 erkennt man große Lautstärken am vorderen Tunnelende und in der Luft darüber: die stehende Welle innerhalb der Unterführung tritt zum großen Teil mit dem Zugende aus der Öffnung in Fahrtrichtung heraus. Etwas später ist diese Wellenfront aus dem diskretisierten Bereich verschwunden. Im Tunnel schwingt die stehende Welle noch aus.

In Abbildung 7.4 ist die Schalldruckverteilung dargestellt. Hier ist die Ausbreitungsrichtung der Wellen besser zu erkennen als in den logarithmischen Darstellungen.

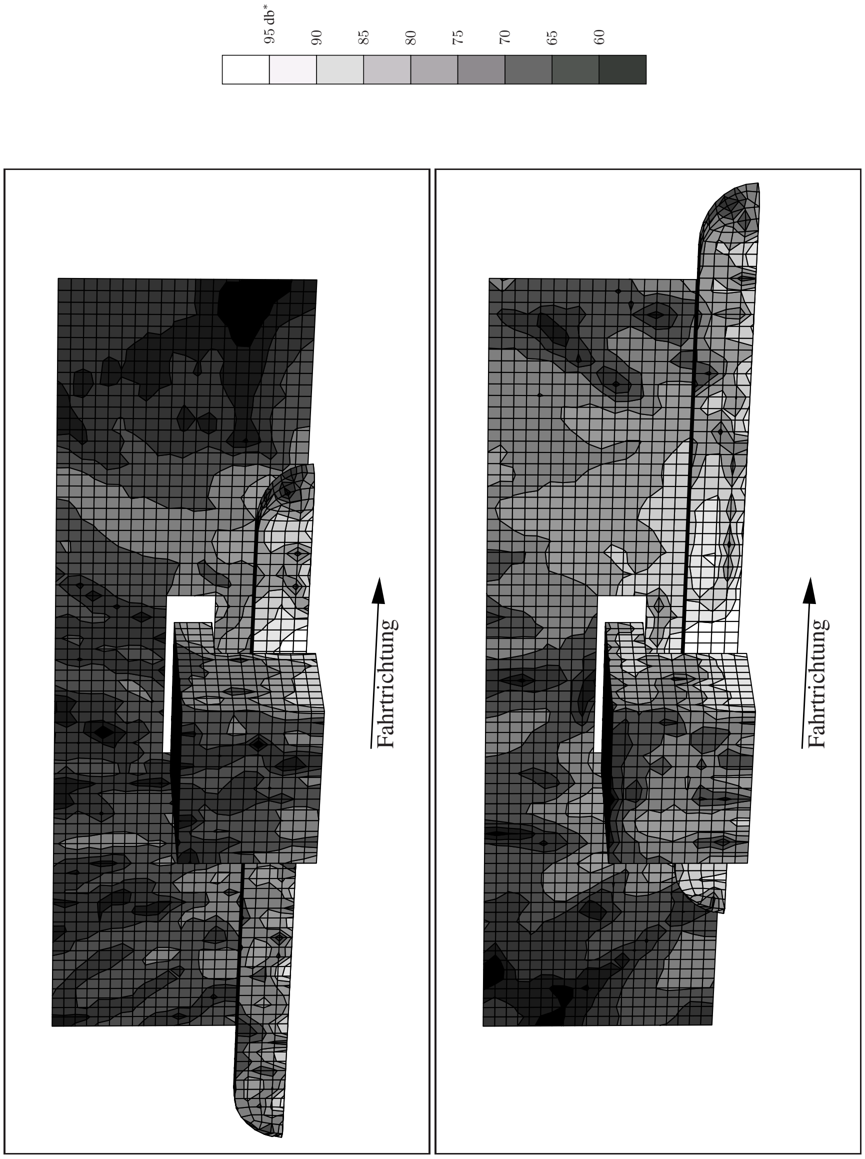


Abbildung 7.2: *Schalldruckverteilung (in db*) bei Durchfahrt eines Hochgeschwindigkeitszugs ($M = 0.3 \widehat{=} 367$km/h) durch eine Unterführung*

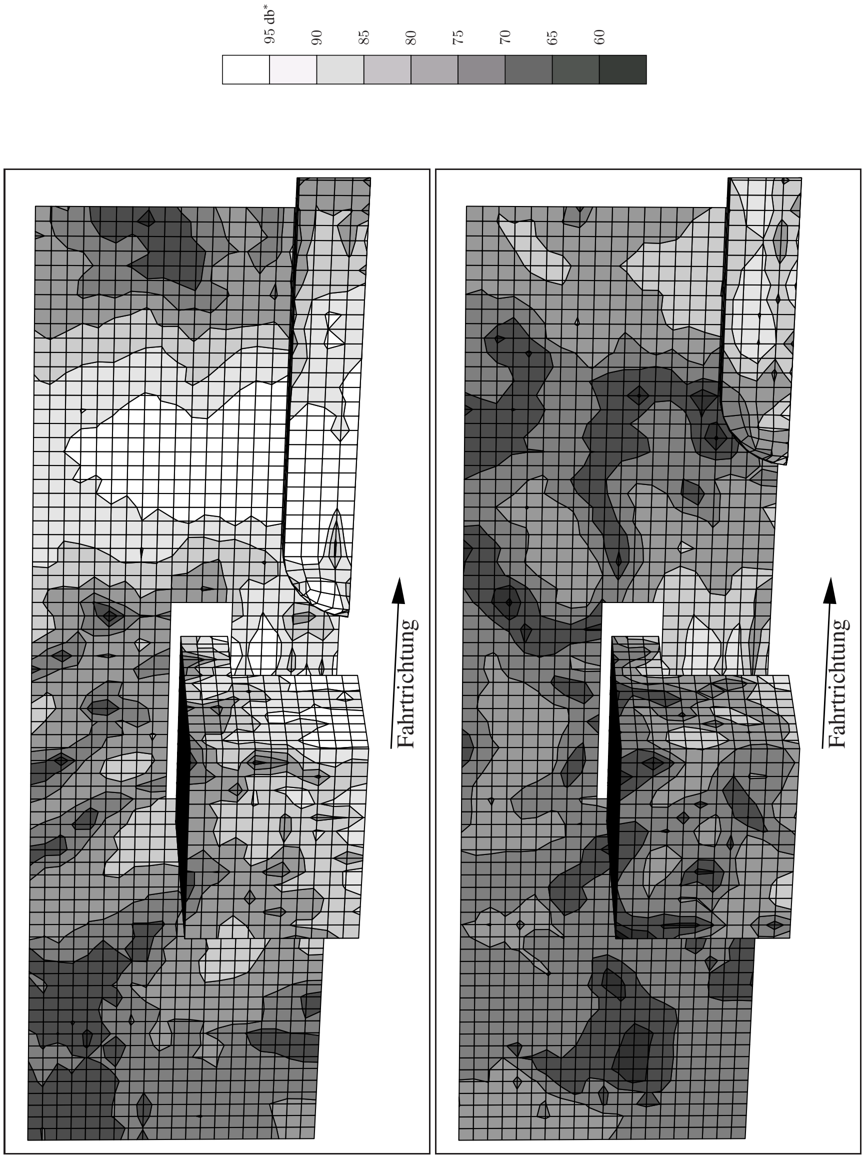


Abbildung 7.3: *Schalldruckverteilung (in db***) bei Austritt eines Hochgeschwindigkeitszugs (*$M = 0.3 \widehat{=} 367$*km/h) aus einer Unterführung*

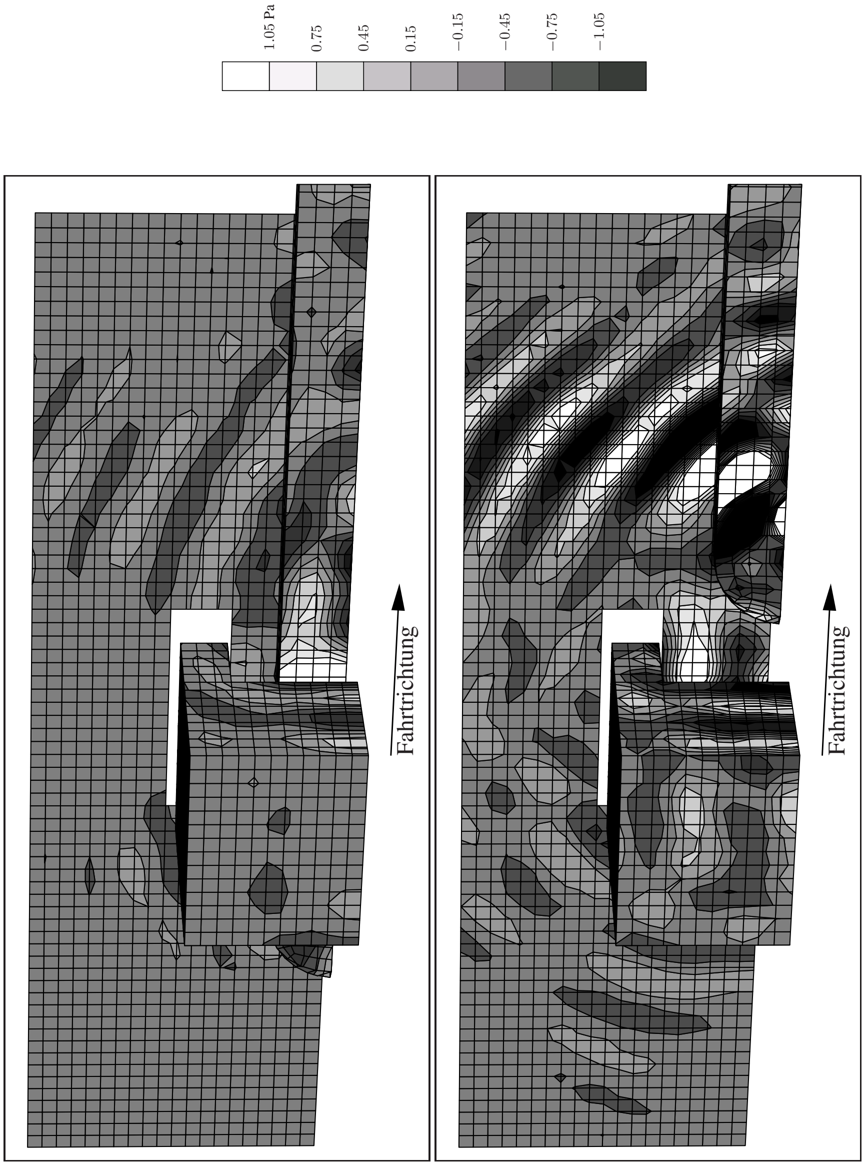


Abbildung 7.4: *Schalldruckverteilung (in Pa) bei Austritt eines Hochgeschwindigkeitszugs ($M = 0.3 \,\widehat{=}\, 367$km/h) aus einer Unterführung*

7.2 Vergleich: fahrende Punktquellen – bewegter Rand

Zum Vergleich wird der Zug des obigen Beispiels mit bewegten Punktquellen modelliert. An die Stelle der zehn Knoten, in denen die Fluß-Randbedingung wirkte (siehe Abbildung 7.1), treten 10 Punktquellen, in denen eine Anregung mit der gleichen Frequenz wie für die Randbedingungen der Knoten vorgegeben wird.

Es ist recht schwierig, die Intensität der Punktquellen richtig zu kalibrieren, um eine in etwa vergleichbare Lösung zu erhalten, da die Abstrahlcharakteristik von Punktquellen, die ja den Schall räumlich an die Umgebung abgeben, sich grundsätzlich von der Abstrahlung einer Oberfläche unterscheidet. Die Amplitude des Massenflusses in den Quellen wird so gewählt, daß der Schalldruck bei dem Eintritt des Zuges in die Unterführung (Abbildung 7.5) im Außenraum vergleichbare Werte erreicht.

Auf der linken Seite in Abbildung 7.5 ist die Lösung für die bewegte Oberfläche dargestellt, auf der rechten Seite befindet sich die Lösung für die 10 Punktquellen. In Abbildung 7.5 ist der Zug soeben in den Tunnel eingefahren. Man erkennt zwar geringfügige qualitative Unterschiede zwischen beiden Lösungen, z.B. auf der Oberfläche und rechts oberhalb der Unterführung, die Amplituden im Außenraum sind jedoch vergleichbar. Bei der Ausfahrt des Zuges in Abbildung 7.6 sind allerdings auch erhebliche quantitative Unterschiede der beiden Lösungen zu verzeichnen. Die Welle konnte sich im Punktquellenbeispiel innerhalb der Unterführung längst nicht so stark aufbauen, weil die Geometrie lokal eine völlig andere ist. Die Wellen können bei der Verwendung von Punktquellen wesentlich ungehinderter aus dem Tunnel herausstrahlen, da sie an der Zugoberfläche nicht reflektiert werden.

Wie zu erwarten war, beeinflußt die undurchlässige Zugoberfläche in Interaktion mit der Tunnelwand die Lösung bei der Tunneldurchfahrt in nicht zu vernachlässigender Weise.

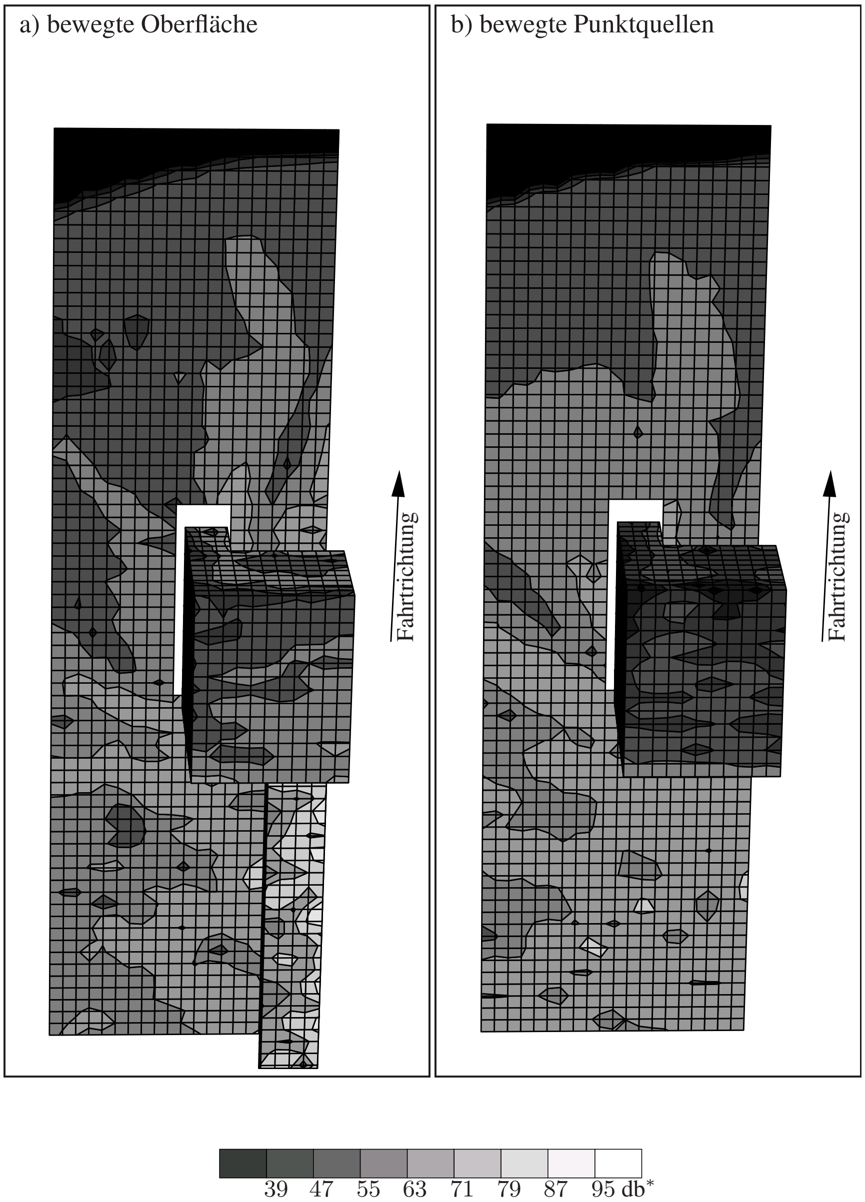


Abbildung 7.5: *Vergleich der Berechnung mit bewegten Oberflächen a) zu der mit bewegten Punktquellen b): Einfahrt in die Unterführung*

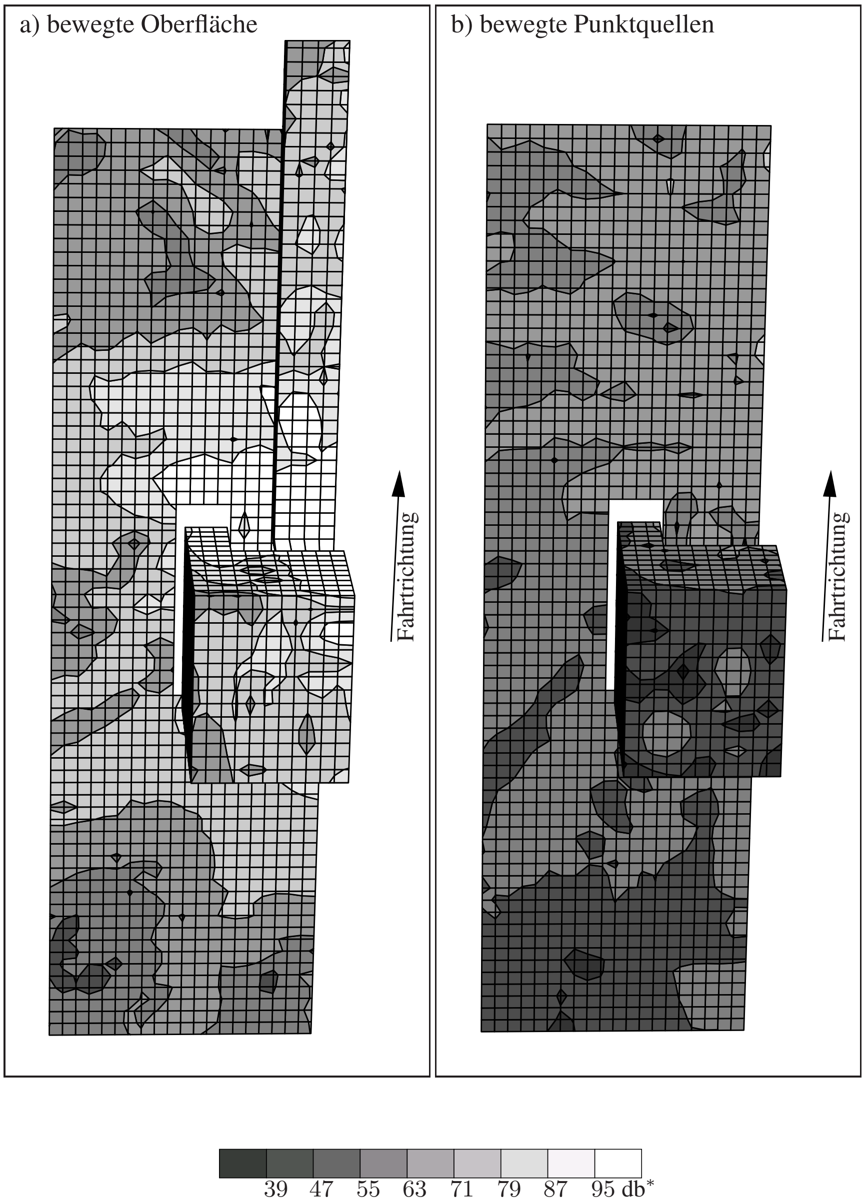


Abbildung 7.6: *Vergleich der Berechnung mit bewegten Oberflächen a) zu der mit bewegten Punktquellen b): Ausfahrt aus der Unterführung*

7.3 Zwei an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Pkw

Im nun folgenden Beispiel wird die Interaktion dreier unterschiedlich bewegter Ränder untersucht. Zwei Autos fahren mit einer Geschwindigkeit von je 147 km/h aneinander vorbei. An einer Straßenseite befindet sich eine 3m hohe und 40m lange Schallschutzmauer, die ein quaderförmiges Gebäude mit den Abmessungen 8m $\times$ 5m $\times$ 5m vom Straßenlärm abschirmen soll. Bei einer mittleren Elementlänge von knapp 0.5m und mindestens sechs Elementlängen pro Schwingung können als Anregungsfrequenz Werte bis zu 116.5 Hz vorgegeben werden. Diese Frequenz wird für die Kotflügel der beiden Autos gewählt. Am Auspuff wird eine niedrigere Frequenz von 87.4 angesetzt. Die Geometrie des behandelten Beispiels zu Beginn der Simulation ist in Abbildung 7.7 dargestellt. Bei einem β-Wert von 1 ergibt sich die Zeitschrittlänge zu 0.001431s.

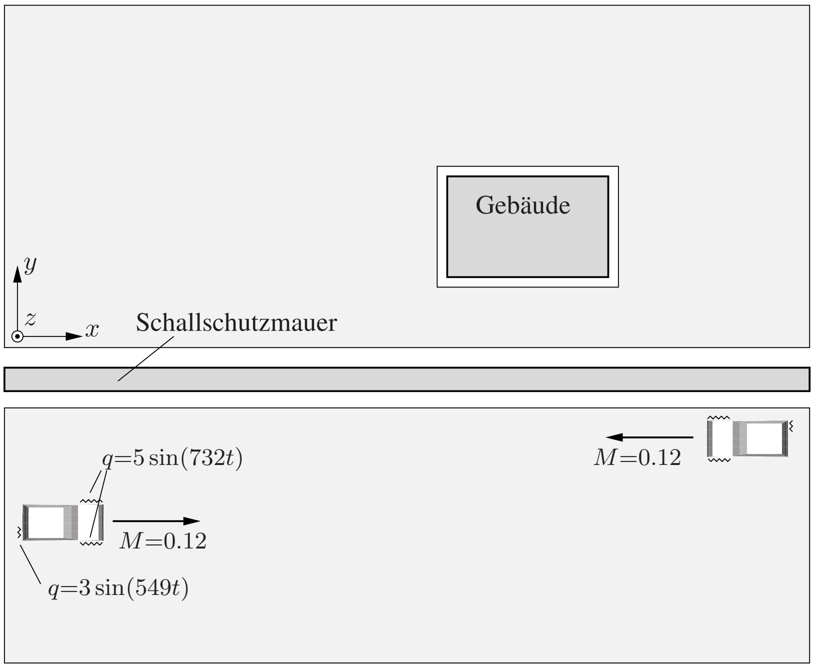


Abbildung 7.7: *Zwei an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Pkw: Grundriß*

Nach 76 Zeitschritten, bzw 0.11 Sekunden (Abbildung 7.8) befinden sich die Fahrzeuge in der Annäherungsphase. Die von den Autos ausgehenden gegenläufigen Wellen verusachen zwischen ihnen eine stehende Welle, deren Amplitude zunimmt, je näher sich die Fahrzeuge kommen. Das Gebäude wird zu diesem Zeitpunkt recht gut vom Straßenlärm abgeschirmt.

Zum Zeitpunkt $t = 0.26$ Sekunden befindet sich ein Fahrzeug direkt vor dem Gebäude (Abbildung 7.9). Da Gebäudewand und Schallschutzmauer parallel verlaufen, wird die Entstehung einer Welle zwischen diesen beiden Rändern begünstigt. An der Hauswand treten recht große Schalldruckwerte auf. Das Schallfeld auf der anderen Seite der Mauer ist geprägt von Interferenzen ("Keulen"), die durch die Überlagerung der verschiedenen Schallquellen und deren Reflektionen an der Schallschutzwand entstehen.

Diese Interferenzen treten deutlicher hervor, je näher sich die Fahrzeuge kommen (Abbildung 7.10). Am oberen Bildrand ist deutlich die Reflektion eines Schallstrahls an der Schallschutzmauer zu erkennen.

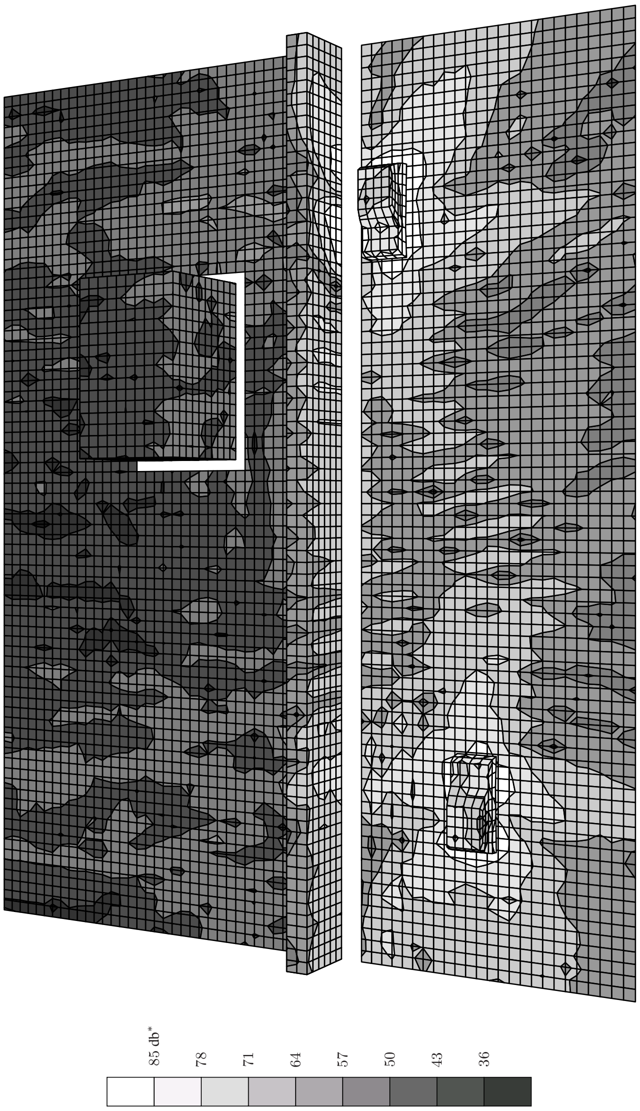


Abbildung 7.8: *Zwei an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Pkw: Schalldruckverteilung (in db*) zum Zeitpunkt* $t = 0.11s$

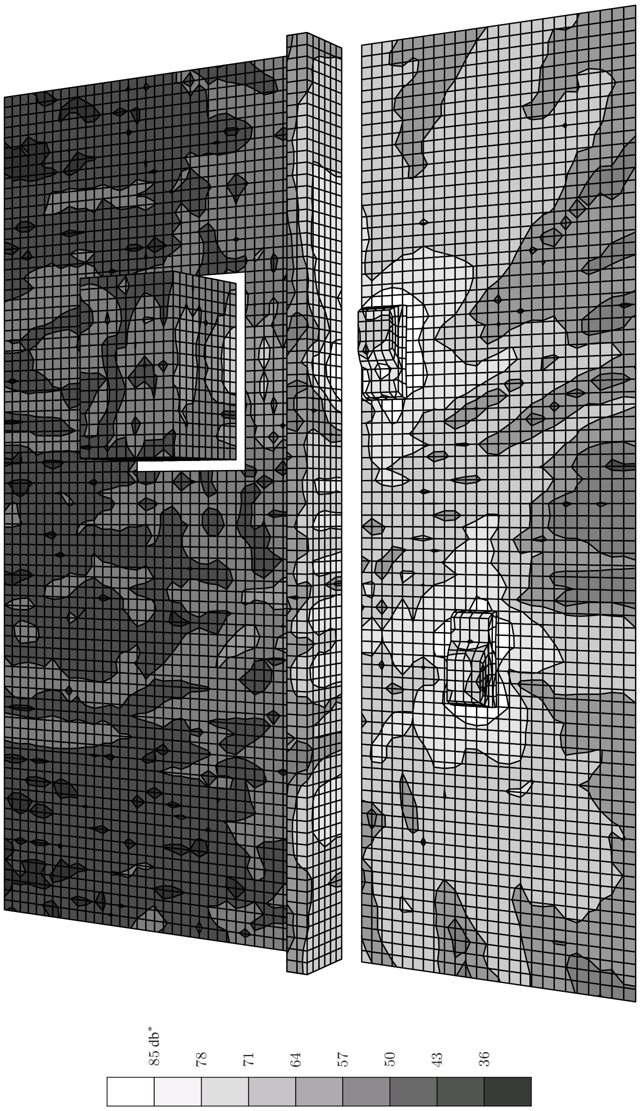


Abbildung 7.9: *Zwei an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Pkw: Schalldruckverteilung (in db*) zum Zeitpunkt* $t = 0.26s$

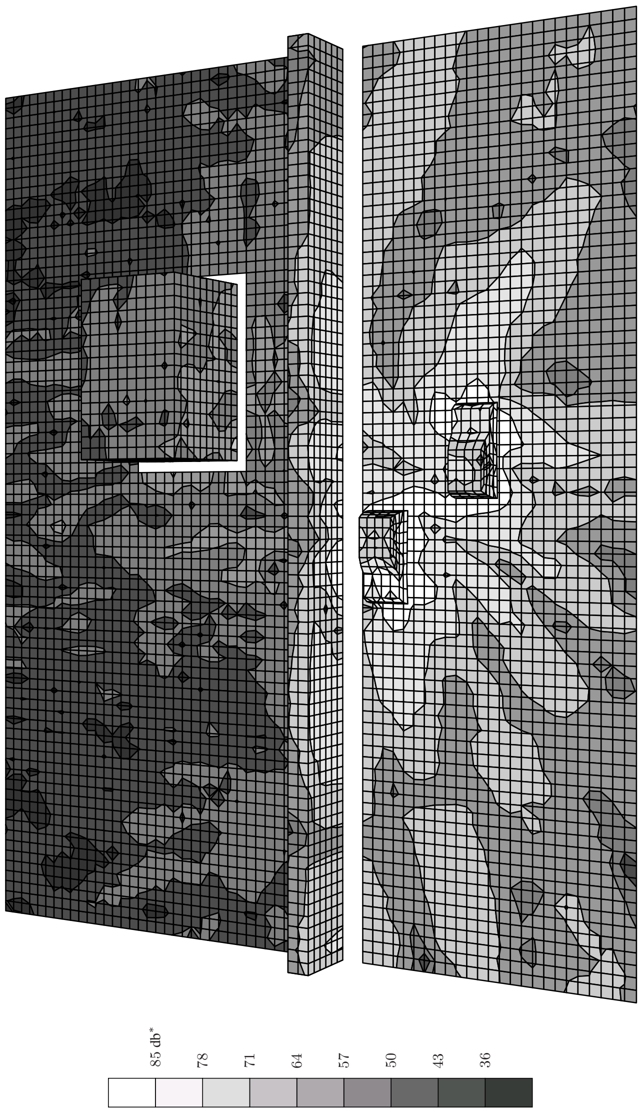


Abbildung 7.10: *Zwei an einer Schallschutzmauer vorbeifahrende Pkw: Schalldruckverteilung (in db*) zum Zeitpunkt* $t = 0.47s$

Im allgemeinen wird ein Schallfeld nicht nur von der Geometrie der Umgebung und der Schallquellen, sondern auch von der Frequenz des abgegeben Schalls stark beeinflußt. So ist bei diesem Beispiel ein deutlicher Abschirmeffekt der Mauer vom Schallfeld der beiden Fahrzeuge zu erkennen. Dieser Abschirmeffekt verstärkt sich noch bei höheren als den hier angenommenen Frequenzen. Wird das Verhältnis der Körperabmessungen zur Wellenlänge sehr klein, beobachtet man nur geringe Auswirkungen der Körpergeometrie auf das Schallfeld, da die Eindringtiefe x von Schallwellen in den Schattenraum hinter einem Hindernis neben dem Abstand D zum Hindernis auch von der Wellenlänge λ abhängt, siehe Abbildung 7.11. Genaueres über die Intensitätsverteilung hinter einem Hindernis liefert die Theorie der FRESNEL-Beugung [23].

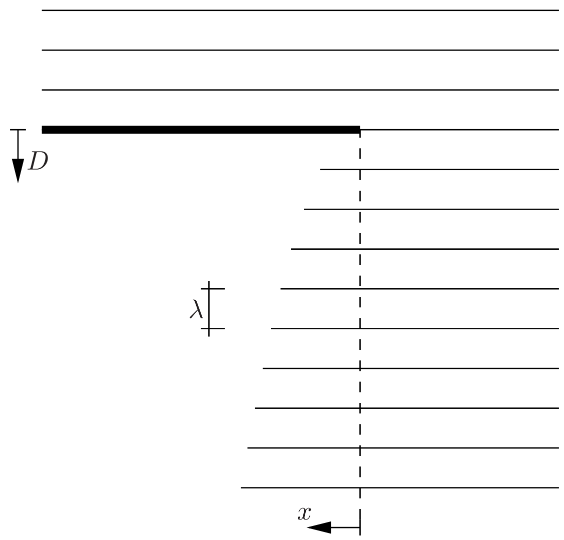


Abbildung 7.11: FRESNEL-*Beugung hinter einer Wand: Die Eindringtiefe wächst mit dem Abstand* D *wie* $x \approx \sqrt{\lambda D}$

7.4 Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf

7.4.1 Ablaufschema des Programms

Der im Rechenprogramm implementierte Algorithmus orientiert sich an Gleichung (6.1), die hier noch einmal dargestellt ist:

$$\boldsymbol{u}_i^k = \left[\mathbf{L}_0^{kk}\right]^{-1} \cdot \Bigg[\hat{\boldsymbol{r}}_i^k + \mathbf{R}_0^{kk}\boldsymbol{b}_i^k + \sum_{j=1}^{i-1}\Bigg(-\mathbf{L}_j^{kk}\boldsymbol{u}_{i-j}^k - \sum_{l=1}^{n,l\neq k}\left\{\mathbf{L}_{i(i-j)}^{kl}\boldsymbol{u}_{i-j}^l\right\} + \mathbf{R}_j^{kk}\boldsymbol{b}_{i-j}^k + \sum_{l=1}^{n,l\neq k}\left\{\mathbf{R}_{i(i-j)}^{kl}\boldsymbol{b}_{i-j}^l\right\}\Bigg)\Bigg]. \quad (7.1)$$

Der Vektor $\boldsymbol{u}_i^k$ ist die Randlösung für den Rand k im i-ten Zeitschritt. Die Matrizen $\mathbf{L}_j^{kk}$ und $\mathbf{R}_j^{kk}$ enthalten die Einflüsse einer bewegten Oberfläche auf ihre eigenen Kollokationspunkte, während die Matrizen $\mathbf{L}_{ij}^{kl}$ und $\mathbf{R}_{ij}^{kl}$ für $k \neq l$ die Einflüsse des Rands l auf Kollokationspunkte einer unabhängig bewegten Oberfläche k enthalten.

Es ergibt sich folgendes Ablaufschema:

1. Initialisieren der Systemdaten (Einlesen der Daten, integralfreie Terme berechnen, Speicherplatz allokieren, etc)

2. Berechnen der Systemmatrizen für alle n unabhängigen Ränder und für alle Integrationszeitschritte. Die Anzahl der Integrationszeitschritte für eine Oberfläche hängt nach Gleichung (4.9) von ihrer Geometrie und Geschwindigkeit ab.

   (a) Aufstellen und Abspeichern der Matrizen $\mathbf{L}_j^{kk}$. Da diese Matrizen dünn besetzt sind, werden Einträge von null nicht abgespeichert, um Speicherplatz zu sparen. Auf das Abspeicherungsverfahren wird im Anhang B näher eingegangen.

   (b) Die Abspeicherung der Matrizen $\mathbf{R}_j^{kk}$ ist nicht notwendig, weil die entsprechenden Elementvektoren sofort nach der numerischen Integration mit den bekannten Randwerten multipliziert und in die Vektoren der rechten Seite eingespeichert werden können. Das Produkt $\mathbf{R}_j^{kk}\boldsymbol{b}_{i-j}^k$ wird also bereits hier für alle Zeitschritte berechnet.

   (c) Aufstellen der Vektoren $\hat{\boldsymbol{r}}_i^k$.

(d) Zerlegen der Hauptdiagonalsubmatrizen $\mathbf{L}_0^{kk}$.

3. Berechnung der Randlösung, Schleife über alle m Lösungszeitschritte: $1 \leq i \leq m$:

   (a) Berechnen der Einflüsse unterschiedlicher Ränder aufeinander (geschweifte Klammern in Gleichung (7.1)). Dies geschieht in einer Schleife über alle Zeitschritte $1 \leq j \leq i-1$. Es müssen einerseits die Matrizen $\mathbf{L}_{ij}^{kl}$ und $\mathbf{R}_{ij}^{kl}$ für $k \neq l$ aufgestellt und darüberhinaus die Produkte dieser Matrizen mit den Spalten der bekannten und unbekannten Randwerte berechnet werden.

   (b) Berechnen der Lösung $\boldsymbol{u}_i$ für den i-ten Zeitschritt. Dies beinhaltet lediglich die Berechnung des Produkts der beiden eckigen Klammern in Gleichung (7.1).

   (c) Berechnen des Einflusses von $\boldsymbol{u}_i$ auf die folgenden Zeitschritte. Hierfür muß das Produkt der schon berechneten Matrizen $\mathbf{L}_j^{kk}$ mit den Spalten $\boldsymbol{u}_i^k$ gebildet werden.

4. Berechnen der Außenraumlösung, Schleife über alle m Lösungszeitschritte: $1 \leq i \leq m$:

   (a) Bewegen sich Außenpunkte und Rand mit gleicher Geschwindigkeit, wird für alle Lösungszeitschritte nur *einmal* über den Rand integriert. Die den Termen in geschweiften Klammern in Gleichung (7.1) entsprechenden Anteile verschwinden. Es verbleiben nur die $\mathbf{L}_j^{kk}$ und $\mathbf{R}_j^{kk}$ entsprechenden Anteile.

   (b) Für Außenpunkte, die sich mit einer anderen Geschwindigkeit als der betrachtete Rand bewegen, muß in jedem Lösungszeitschritt über den Rand neu integriert werden. Alle in Gleichung (7.1) vorkommenden Terme müssen für diese Außenpunkte berechnet werden.

Der für die Berechnungen erforderliche Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf wird zunächst für ein einfaches Beispiel dargestellt, um den Einfluß der Bewegung der Oberflächen zu demonstrieren, bevor auf den Ressourcenverbrauch der im vorigen Abschnitt besprochenen Beispiele eingeganden wird. Alle Berechnungen wurden auf einem Pentium II mit 400 MHz und 128 MB Hauptspeicher durchgeführt.

7.4.2 Sich bewegende Kugel mit Außenpunkten

In der Tabelle 7.1 ist für die Schritte des Ablaufschemas die erforderliche Rechenzeit angegeben. Das berechnete Beispiel ist eine Viertelkugel mit 417 Knoten und zwei Symmetrieebenen. Im Außenraum wird der Schalldruck in 761 Außenpunkten berechnet.

	Kugel: $M = 0.0$		Kugel: $M = 0.6$	
	AP: $M = 0.0$	AP: $M = 0.6$	AP: $M = 0.0$	AP: $M = 0.6$
1	0.44s	0.50s	0.43s	0.41s
2	249.37s	250.92s	341.10s	338.12s
3a	0.00s	0.00s	0.00s	0.00s
3b	1.37s	1.35s	1.37s	1.32s
3c	37.99s	37.63s	44.21s	44.20s
4a	264.21s	0.00s	0.00s	293.20s
4b	0.00s	4622.06s	4529.67s	0.00s
Gesamt	553.35s	4912.47s	4916.79s	677.25s

Tabelle 7.1: *Rechenzeit für Kugel mit Außenpunkten, aufgeschlüsselt nach den Schritten des Ablaufschemas aus Abschnitt 7.4.1: Einfluß der Geschwindigkeit von Oberflächen und Außenpunkten*

Der Hauptanteil der Rechenzeit ist für die numerische Integration über die Oberflächen erforderlich. Die Zerlegung der Hautdiagonalmatrix und das Lösen des Gleichungssystems (Punkt 3b) nimmt nur einen sehr kleinen Teil der Rechenzeit in Anspruch. Ein Vergleich der Spalten 2 und 3 zeigt, daß für die Berechnung der Außenraumlösung (Zeilen 4a und 4b) nicht darauf ankommt, ob sich der Rand oder der Kollokationspunkt bewegt, entscheidend ist, ob sich beide gleich oder unterschiedlich bewegen. Die Rechenzeit für die Randlösung – Zeilen 2 bis 3c – steigt für die bewegte Kugel etwas an. Dies liegt zum einen daran, daß die geschwindigkeitsabhängigen Terme der Integralkerne nicht mehr null sind, zum anderen vergrößert sich die Zahl der Integrationszeitschritte (siehe Tabelle 7.2), weil der Schall länger braucht, um vom hinteren Bereich der Oberfläche zum vorderen Bereich zu gelangen. Die Abweichungen der Zeilen 2 bis 3c zwischen den Spalten 1 und 2 sowie zwischen Spalte 3 und 4 liegen im Streubereich der Zeitmessung, da der Aufwand jeweils gleich ist.

Dadurch, daß nur Matrizeneinträge ungleich null abgespeichert werden, reduziert sich der Gesamtspeicherplatzbedarf für die Matrizen $\mathbf{L}_j^{kk}$ erheblich. Der

Einspareffekt wird sogar noch wesentlich größer, wenn man statt einer kompakten Oberfläche wie einer Kugel einen langgezogenen Rand (zum Beispiel eine Schallschutzmauer) betrachtet. Dies wird in Abbildung 7.12 deutlich.

	Kugel $M = 0.0$	Kugel $M = 0.6$
Integrationszeitschritte	24	57
Gesamtspeicherplatz, $\mathbf{L}_j^{kk}$ voll besetzt	31.8MB	75.6MB
Gesomtspeicherplatz, "sparse" $\mathbf{L}_j^{kk}$	20.0MB	24.4MB

Tabelle 7.2: *Speicherplatzbedarf für Kugel mit Außenpunkten, Einfluß der Geschwindigkeit der Oberflächen*

7.4.3 Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3

In der Tabelle 7.3 sind die Diskretisierungsparameter der Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3 dargestellt. Im Beispiel mit der Schallschutzmauer sind zwar deutlich mehr Elemente, Knoten und Außenpunkte enthalten, dafür sind im Beispiel des Schnellzugs aber zwei Symmetrieebenen angegeben, das heißt, daß sich die Anzahl der zu berechnenden Kollokationspunkte vervierfacht, während sie sich im Beispiel der Schallschutzmauer nur verdoppelt.

	Beispiel mit Schallschutzmauer	Beispiel mit Hochgeschwindigkeitszug
Knoten	2242	1425
Außenpunkte	4754	2790
Symmetrieebenen	1	2
Zeitschrittlänge	1.431e-03s	2.031e-03s
Berechnete Zeitschritte	300	200

Tabelle 7.3: *Diskretisierung der Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3*

Der Speicherplatzbedarf der Beispiele ist in Tabelle 7.4 dargestellt. In beiden Beispielen ist es noch möglich, die gesamten Matrizen im Hauptspeicher (128MB) vorzuhalten. Nimmt die Größe der Matrizen weiter zu, müssen Teile der $\mathbf{L}_j^{kk}$-Matrizen auf der Festplatte temporär zwischengespeichert werden.

Eine Diskretisierung der Halbraumoberfläche ist aufgrund der erforderlichen Rechenzeit nicht möglich, so daß bei der zur Verfügung stehenden Rechenkapazität die Fundamentallösung für den Halbraum angewendet werden muß.

Oberfläche		Diskretisierung / Knoten	Integrationszeitschritte	Gesamtspeicherplatzbedarf für Matrizen
Kfz 1	M=0.12	154	12	1.48 MB
Kfz 2	M=0.12	154	12	1.48 MB
Haus	M=0	707	30	34.59 MB
Mauer	M=0	1227	85	73.06 MB
Zug	M=0.30	625	97	26.08 MB
Tunnel	M=0	800	40	76.96 MB

Tabelle 7.4: *Speicherplatzbedarf für die Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3*

In Abbildung 7.12 ist der Speicherplatzbedarf der in den Beispielen vorkommenden Oberflächen über die jeweiligen Integrationszeitschritte dargestellt.

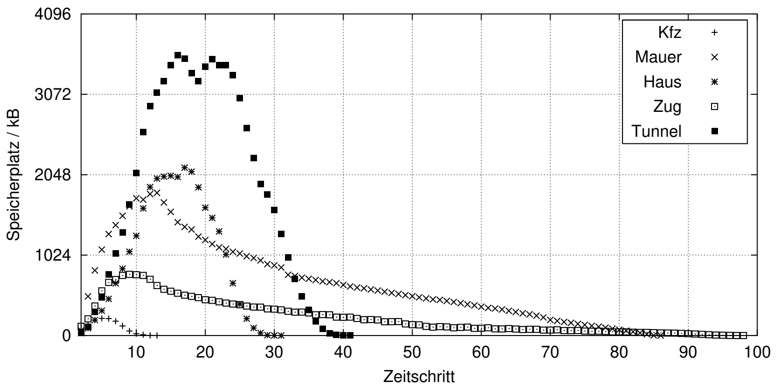


Abbildung 7.12: *Speicherplatzbedarf pro Zeitschritt für die Matrizen* $\mathbf{L}_j^{kk}$ *verschiedener Körper*

Die Tabelle 7.5 enthält die erforderliche Rechenzeit aufgeschlüsselt gemäß der Schritte des Rechenalgorithmus in Abschnitt 7.4.1. Im Vergleich mit den Punkten 3a und 4, in denen die Rechenzeit für Integrationen bei unterschiedlicher Geschwindigkeit von Oberfläche und Kollokationspunkt aufgelistet ist, fällt die Rechenzeit der anderen Punkte nicht ins Gewicht.

	Beispiel mit Schallschutzmauer	Beispiel mit Hochgeschwindigkeitszug
1	1.30s	0.72s
2	4338.72s	2605.34s
3a	47218.23s	18641.11s
3b	37.57s	10.88s
3c	349.10s	262.62s
4	39417.02s	39636.91s
Gesamt	91361.97s	61157.58s

Tabelle 7.5: *Rechenzeit für die Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3, aufgeschlüsselt nach den Schritten des Ablaufschemas aus Abschnitt 7.4.1*

In Abbildung 7.13 ist für die Punkte 3a und 4 aus Tabelle 7.5 die erforderliche Rechenzeit in Abhängigkeit vom Zeitschritt dargestellt. Diese steigt zu Anfang stark an, während die von den Oberflächen ausgehenden Wellenfronten allmählich das gesamte Integrationsgebiet erfassen. Sobald die maximale Anzahl der Integrationszeitschritte erreicht ist (85 im Beispiel der Schallschutzmauer, 97 im Beispiel des Hochgeschwindigkeitszugs) verlangsamt sich der Anstieg der Rechenzeit pro Lösungszeitschritt.

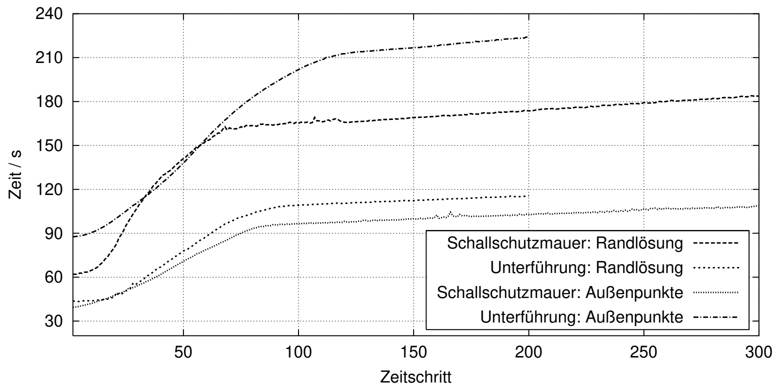


Abbildung 7.13: *Rechenzeit pro Zeitschritt für die Beispiele aus den Abschnitten 7.1 und 7.3*

8 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Arbeit war es, ein Verfahren zu Simulation der Schallabstrahlung bewegter Oberflächen zu entwickeln.

Zu diesem Zweck wurde ausgehend von den Gleichungen der linearen Akustik die Wellengleichung in ihrer mediumfesten und ihrer konvektiven Formulierung hergeleitet. Die Verwendung einer linearen Druckformulierung der Wellengleichung impliziert die Vernachlässigung aller Strömungseinflüsse, die um die bewegten Oberflächen herum auftreten.

Um die Eigenschaften dieser Differentialgleichungen zu untersuchen und insbesondere den Einfluß der Bewegung der Schallquellen auf das Schallfeld zu beschreiben, wurden Lösungen der Wellengleichung für bewegte Punktquellen betrachtet. Einerseits beobachtet man eine Verschiebung der *Frequenzen* – den sogenannten Dopplereffekt –, andererseits hat die Bewegung der Schallquellen auch Auswirkungen auf die *Amplitude* der Druckschwankungen, also auf die Lautstärke des emittierten Schalls.

Unter Benutzung der konvektiven Formulierung der Wellengleichung wurde mit der Methode der gewichteten Residuen eine Randintegralgleichung für Oberflächen hergeleitet, die sich mit konstanter Unterschallgeschwindigkeit geradlinig fortbewegen. Diese Integralgleichung diente als Ausgangspunkt für die Randelementmethode. Auch die mediumfeste Formulierung der Wellengleichung kann für die Herleitung der integralen Formulierung herangezogen werden. Mit einer einfachen Transformation lassen sich beide Formulierungen ineinander überführen.

Für die Berechnung des Schallfelds mehrerer unterschiedlich bewegter Ränder kommt ein Zeitschrittverfahren zum Einsatz, weil sich ein stationärer Zustand, der Voraussetzung für eine Berechnung im Frequenzbereich ist, nicht einstellt. Da die Differentialgleichungen im homogenen, linearen Fall für die Potential- und Schalldruckformulierung gleich sind, können mit dem entwickelten Algorithmus sowohl laminare Strömungsvorgänge (mit dem Potential als Feldgröße, siehe Abschnitt 5.2), als auch akustische Probleme (mit dem Schalldruck als Feldgröße) berechnet werden.

In Kapitel 4 wurde auf die Besonderheiten eingegangen, die bei der Auswertung der singulären Integrale beachtet werden müssen. Die Berechnung des integralfreien Terms ist bei bewegten Oberflächen wesentlich aufwendiger als bei stationären Oberflächen. Er kann jedoch auch für bewegte Ränder bei beliebiger Randgeometrie (auch auf Kanten und Ecken) numerisch berechnet werden, so daß ein einfaches Verfahren (Kollokationsmethode mit Knotenpunkten in den Elementecken) angewendet werden konnte.

Anhand einiger Beispiele wurde auf das Stabilitätsverhalten und die Genauigkeit des Verfahrens eingegangen. Der Einfluß von Orts- und Zeitdiskretisierung auf die numerische Dämpfung und auf das Auftreten von Instabilitäten wurde dargestellt. Hieraus ergab sich, daß bei entsprechend aufeinander abgestimmter Orts- und Zeitdiskretisierung ein genaues Ergebnis bei einem stabilen Lösungsverlauf erzielt wird.

Daß die Methode auch bei großen Geschwindigkeiten gut einsetzbar ist, zeigte ein Vergleich der numerischen Berechnung mit einer analytischen Lösung. Das Verfahren liefert bei Geschwindigkeiten bis zu 730 km/h zufriedenstellende Ergebnisse, während bei Geschwindigkeiten bis 500 km/h eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung erreicht wird. Zum Abschluß der Arbeit wurde die Leistungsfähigkeit des Verfahrens an zwei realitätsnahen Beispielen demonstriert. Es konnte anhand eines Beispiels gezeigt werden, daß Schallreflektionen zwischen sich unterschiedlich bewegenden Oberflächen einen großen Einfluß auf ein Schallfeld haben können. Um diese Interaktionseffekte zu berücksichtigen, müssen zur Modellierung aller beteiligten Körper Randelementnetze verwendet werden. Mit sich bewegenden Punktquellen können diese Reflektionseffekte nicht erfaßt werden.

Sollte sich herausstellen, daß nichtlineare Phänomene oder Strömungseffekte die Schallausbreitung nachhaltig beeinflussen, müssen diese mit einer anderen Methode untersucht werden, etwa mit der Finite-Element Methode, die sich besser zur Modellierung von Nichtlinearitäten eignet als die Randelementmethode. In vielen Fällen werden sich diese Nichtlinearitäten jedoch auf die unmittelbare Nachbarschaft des bewegten Körpers beschränken, so daß durch die Kopplung der hier vorgestellten Methode mit der FEM diese Probleme sehr effizient berechnet werden könnten. Die bewegten Oberflächen werden zusammen mit den Bereichen der Nichtlinearität von einer fiktiven Oberfläche umschlossen. Für die Berechnung des daran angekoppelten Außenraumproblems ist die hier vorgestellte Methode sehr gut geeignet, da im Fernfeld in guter Näherung die lineare Theorie angewendet werden kann. Dieses Vorgehen wurde bereits von FARASSAT/MYERS [18] vorgeschlagen.

Das hier vorgestellte Verfahren stößt in seiner jetzigen Implementierung bereits bei relativ kleinen Beispielen, wie den im letzten Abschnitt besprochenen, schnell an die Grenzen der heute zur Verfügung stehenden Rechnerkapazitäten. Um das hier vorgestellte Verfahren in größerem Maßstab für Berechnungen in der Umweltakustik einsetzen zu können, wäre es wünschenswert, Verfahren zur weiteren Verringerung der Rechenaufwands und des Speicherbedarfs zu entwickeln.

A Verwendete Symbole und nützliche Beziehungen

A.1 Verwendete Symbole

Vektoren und Spalten sind grundsätzlich fett und kursiv gedruckt, Matrizen sind durch fette, senkrechte Buchstaben gekennzeichnet.

Feldgrößen

a	Quellenbelegung
$\boldsymbol{b}$	Volumenkraftvektor
m	Massenverteilung
p	Schalldruck
q	Schallfluß
ϕ	Geschwindigkeitspotential
ρ	Dichte
$\boldsymbol{v}$	Schallschnelle, Geschwindigkeitsvektor

Koordinaten

t	Zeitkoordinate im Kollokationspunkt
τ	Zeitkoordinate im Emissionspunkt
$\boldsymbol{x}$	Mediumfeste Koordinaten: Beobachter, Kollokationspunkt
$\boldsymbol{\xi}$	Körperfeste Koordinaten: Beobachter, Kollokationspunkt
$\boldsymbol{y}$	Mediumfeste Koordinaten: Schallquelle, Integrationskoordinate
$\boldsymbol{\eta}$	Körperfeste Koordinaten: Schallquelle, Integrationskoordinate

Operatoren

$\dfrac{\partial}{\partial t}$	partielle Zeitableitung
$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$	substantielle Zeitableitung
$\boldsymbol{\nabla}$	Gradient
∇^2	Laplaceoperator
$\dfrac{\partial}{\partial n}$	Normalenableitung, $\dfrac{\partial}{\partial n} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}$
$\mathbf{grad}$	Gradient
div	Divergenz
$\mathbf{rot}$	Rotation

kinematische Größen

$\boldsymbol{M}$, M	Machvektor, Machzahl
M_R, M_r, M_n	Komponente des Machvektors in Richtung von $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{M}_t$	tangentialer Anteil des Machvektors (senkrecht zu $\boldsymbol{n}$)
$\boldsymbol{n}$	Normalenvektor, $n = 1$
$\boldsymbol{R}$, R	Abstandsvektor, Abstand zwischen Quellpunkt und Beobachter in mediumfesten Koordinaten
$\boldsymbol{r}$, r	Abstandsvektor, Abstand zwischen Quellpunkt und Beobachter in körperfesten Koordinaten
R_1	$R_1 = R(1 - M_R) = r\sqrt{1 - M^2 + {M_r}^2}$ für $M < 1$

Funktionen, Distributionen

$\delta(x)$	DIRAC Distribution
$H(x)$	Heavisidefunktion
G	Fundamentallösung
ϕ_i	Ortsansatzfunktion für den Knoten i
ψ_j	Zeitansatzfunktion für den Zeitschritt j

sonstige Symbole

B	Intensität einer Punktquelle
c	Wellengeschwindigkeit
d	integralfreier Term
$\bar{d}$	$4\pi - d$
E	Fehlernorm
i	imaginäre Einheit: $\sqrt{-1}$
h	mittlere Elementabmessung
$\boldsymbol{J}$,J	Jacobimatrix, Jacobideterminante
K, K_T, K_S	Kompressionsmodul, isothermer Kompressionsmodul, adiabatischer Kompressionsmodul
α_r	Reflektionskoeffizient
β	dimensionslose Beziehung zwischen Orts- und Zeitdiskretisierung, $\beta = c\Delta\tau/h$
Δt	Zeitraum $t - \tau$
$\Delta\tau$	Zeitschrittweite
τ^*	retardierte Zeit, $\tau^* = t - R/c$
Γ	Berandung eines Körpers
Ω	Gebiet eines Körpers
ω	Kreisfrequenz

A.2 Nützliche Beziehungen

Reynoldssches Transporttheorem

Es sei $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ ein Vektorfeld und $\boldsymbol{W}(t)$ sein Integral über ein zeitlich veränderliches Volumen. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{W}(t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega} \boldsymbol{w}\ \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{D}t} + \boldsymbol{w}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}V$$

mit dem Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$.

Substantielle Zeitableitung

Die substantielle Zeitableitung setzt sich zusammen aus der lokalen Ableitung und einem geschwindigkeitsabhängigen Term, der sogenannten konvektiven Ableitung:

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\,f.$$

Satz von Gauß

Das Volumenintegral der Divergenz eines Vektors ist gleich dem Oberflächenintegral der Normalenkomponente dieses Vektors:

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{w}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}O\,.$$

B Speichertechnik

Um den Speicherplatzbedarf des Rechenalgorithmus zu reduzieren, bietet es sich an, diejenigen Matrizen, die in jedem Zeitschritt gebraucht werden, gepackt abzuspeichern. Da diese Matrizen dünn besetzt sind, liegt es nahe, nur die Werte abzuspeichern, die vom Betrag größer sind als eine vorgegebene Schranke. Für diese Schranke wurde in den berechneten Beispielen der Wert 10^{-9} verwendet. Diese Speichertechnik hat gegenüber anderen Komprimierungstechniken den Vorteil, daß auf die einzelnen Matrixeinträge auch nach der Komprimierung leicht zugegriffen werden kann. So können mit den gepackten Matrizen die Skalarprodukte mit den Lösungsvektoren sehr effizient durchgeführt werden, da auf die Nulleinträge nicht zugegriffen werden muß.

Die Information, die ein Matrixeintrag enthält, ist jedoch nicht nur dessen Zahlenwert, sondern auch seine Position in der Matrix. Für jeden Wert in der gepackten Matrix muß ein deshalb ein Index allokiert werden, der die Position dieses Eintrags in der ungepackten Matrix angibt. Wenn beispielsweise ein Indexwert einen Speicherplatz von der Hälfte eines Matrizeneintrags beansprucht, lohnt sich diese Speichertechnik bereits dann, wenn mehr als ein Drittel aller Matrizenwerte null sind. Die wirklich erreichten Einsparungen an Speicherplatz sind in den Tabellen 7.2 und 7.4 angegeben.

Im Programm werden die Submatrizen $\mathbf{L}_j^{kk}$ zeitschrittweise berechnet. Vor dem Beginn der Zeitschrittschleife wird der Speicherplatz für eine voll besetzte Matrix allokiert. Dann werden die Einträge der Matrix für den ersten Zeitschritt berechnet und in die unkomprimierte Matrix eingespeichert. Wenn diese Matrix vollständig berechnet ist, wird der benötigte Speicherplatz für die komprimierte Matrix dieses Zeitschritts berechnet und allokiert und mit den Einträgen der unkomprimierten Matrix belegt, so daß die unkomprimierte Matrix die Einträge für den nächsten Zeitschritt aufnehmen kann.

Der Nachteil der implementierten Speichertechnik ist, daß zusätzlich zum eigentlich benötigten Speicherplatz *eine* unkomprimierte Matrix im Speicher vorgehalten werden muß, solange die Integration nicht beendet ist. Gegenüber dem insgesamt anfallenden Speicherbedarf fällt dieser Nachteil jedoch kaum ins Gewicht.

C Herleitung der Kirchhoffschen Integralgleichung nach Farassat/Myers

FARASSAT/MYERS veröffentlichten die hier dargestellte Herleitung 1988 in [18]. Sie zeigten, daß die 1930 von MORGANS veröffentlichte sogenannte allgemeine KIRCHHOFFsche Integralgleichung korrekt ist. In den folgenden Abschnitten wird Gebrauch von der Distributionstheorie gemacht. Definitionen und einige Rechenregeln finden sich im Anhang C.6, als weiterführende Literatur seien [29] und [17] empfohlen.

C.1 Erweiterung des Geltungsbereichs der DGL

Ausgangspunkt ist die homogene Wellengleichung in ihrer *Druck*formulierung (Gleichung 2.6).

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t) = \Box^2 p = 0 \tag{C.1}$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur außerhalb eines stückweise glatten Rands S, der als Funktion $f(\boldsymbol{x},t)$ gegeben ist:

$$\begin{array}{ll} f > 0 & \text{außerhalb } S \\ f < 0 & \text{innerhalb } S. \end{array}$$

Der Rand S sei starr, Starrkörperverschiebungen seien aber zugelassen. Die Ableitungen von $f(\boldsymbol{x},t)$ an der Stelle $f = 0$ ergeben den Normalenvektor $\boldsymbol{n}$, der in den Außenraum zeigt, sowie die Geschwindigkeit des Rands in Normalenrichtung v_n:

$$\begin{aligned} f &= 0 && \text{auf } S \\ \boldsymbol{\nabla} f &= \boldsymbol{n} && \text{auf } S \\ \frac{\partial f}{\partial t_{\boldsymbol{x}}} &= -\frac{\partial f}{\partial t_{\boldsymbol{\xi}}} = -v_n && \text{auf } S \end{aligned} \tag{C.2}$$

Die Schreibweise $\partial/\partial t_{\boldsymbol{x}}$ bedeutet, daß bei der Zeitableitung die Koordinaten $\boldsymbol{x}$ festgehalten werden, dabei sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ mediumfeste Koordinaten, $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\eta}$ körperfeste Koordinaten bezüglich der bewegten Oberfläche S.

Der Geltungsbereich der Differentialgleichung wird auf den Innenraum erweitert, indem der Schalldruck p hier zu null gesetzt wird.

$$\tilde{p}(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} p(\boldsymbol{x},t) & f>0 \quad \text{außerhalb } S \\ 0 & f<0 \quad \text{innerhalb } S \end{cases} \tag{C.3}$$

Auf der Oberfläche S sind demnach Unstetigkeiten in $\tilde{p}$ und $\tilde{q} = \partial\tilde{p}/\partial n$ vorhanden. Aus den *Randbedingungen*, die den Geltungbereich der Differentialgleichung (C.1) begrenzen, werden *Sprungbedingungen* innerhalb des Geltungsbereichs einer neuen Differentialgleichung:

$$\bar{\nabla}^2 p(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\bar{\partial}^2}{\partial t^2}\tilde{p}(\boldsymbol{x},t) = \bar{\Box}^2\tilde{p} \neq 0\,. \tag{C.4}$$

Die Gleichung (C.4) gilt im gesamten Gebiet, im Außenraum sowie innerhalb geschlossener Körper. Die Randbedingungen liegen im Unendlichen, wo die Fundamentallösung und die Schwankungen der Feldgrößen p und q den Wert null annehmen. Es herrschen also homogene Randbedingungen. Die Anfangsbedingungen werden ebenfalls als homogen angenommen.

Mit Gleichung (C.16) und den Ableitungen der den Rand beschreibenden Funktion (C.2) können die Derivationen in der Gleichung (C.6) ausgewertet werden. Für die Ortsableitungen erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{p} &= \boldsymbol{\nabla}p + p_f\,\boldsymbol{\nabla}f\,\delta(f) = \boldsymbol{\nabla}p + p_f\,\boldsymbol{n}\,\delta(f) \\ \bar{\nabla}^2\tilde{p} &= \nabla^2\tilde{p} + q_f\,\delta(f) + \bar{\boldsymbol{\nabla}}(p_f\,\boldsymbol{n}\,\delta(f)) \end{aligned}$$

p_f und q_f sind die Werte von p und q auf der Oberfläche $f=0$. Für die Zeitableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}\tilde{p} &= \frac{\partial}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}\tilde{p} + p_f\,\frac{\partial}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}f\,\delta(f) = \frac{\partial}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}\tilde{p} - p_f\,v_n\,\delta(f) \\ \frac{\bar{\partial}}{\partial {t_{\boldsymbol{x}}}^2}\tilde{p} &= \frac{\partial}{\partial {t_{\boldsymbol{x}}}^2}\tilde{p} - \frac{\partial}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}p_f\,v_n\,\delta(f) - \frac{\bar{\partial}}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}(p_f\,v_n\,\delta(f)) \end{aligned}$$

Zusammengefaßt gilt:

$$\bar{\Box}^2\tilde{p} = (q_f + \frac{\partial p_f}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}\,\frac{v_n}{c^2})\,\delta(f) + \bar{\boldsymbol{\nabla}}(p_f\,\boldsymbol{n}\,\delta(f)) + \frac{\bar{\partial}}{\partial t_{\boldsymbol{x}}}(p_f\,\frac{v_n}{c^2}\,\delta(f))\,.$$

C.2 Die integrale Formulierung

Mit Hilfe der Distributionstheorie läßt sich zu einem gegebenen Differentialoperator eine äquivalente integrale Formulierung herleiten.

Sei l ein linearer Differentialausdruck und L der dazugehörige Differentialoperator:

$$\left.\begin{array}{ll} lp = v & \text{im Gebiet } \Omega \\ R.B.(p) = 0 & \text{homogene Randbedingungen} \end{array}\right\} : Lp = v.$$

Für die Fundamentallösung $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ des Differentialausdrucks l gilt:

$$\bar{L}_y G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\,.$$

Wenn man alle Ableitungen als Derivationen auffaßt, sind Unstetigkeiten von p und/oder dessen Ableitungen (bis zur Ordnung $n-1$, wenn l von der Ordnung n ist) erlaubt:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{l}p = \tilde{v} \\ R.B.(p) = 0 \end{array}\right\} : \bar{L}p = \tilde{v}.$$

Die Funktion $\tilde{v}$ enthält v und die Sprünge von p und dessen Ableitungen multipliziert mit der DIRAC Distribution und deren Ableitungen, siehe Gleichungen (C.12) und (C.15). Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{L}_y p(\boldsymbol{y})\; G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\;\mathrm{d}\boldsymbol{y} &= \langle \bar{L}_y p(\boldsymbol{y}), G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rangle = \langle \tilde{v}(\boldsymbol{y}), G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rangle \\ &= -\langle p(\boldsymbol{y}), \bar{L}_y G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rangle = -\langle p(\boldsymbol{y}), -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rangle = p(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

oder einfach

$$p(\boldsymbol{x}) = \langle \tilde{v}(\boldsymbol{y}), G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rangle\,. \tag{C.5}$$

Aus den Gleichungen (C.4) und (C.5) erhält man eine integrale Formulierung, die im gesamten, unbegrenzten Gebiet gültig ist:

$$\int_T \int_\Omega \bar{\Box}^2 \tilde{p}(\boldsymbol{y}, \tau) \cdot G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau)\;\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\tau = \tilde{p}(\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{C.6}$$

Da als Ausgangsgleichung die Differentialgleichung in einem mediumfesten Koordinatensystem gewählt wurde, muß als Fundamentallösung die Gleichung (2.19) verwendet werden.

$$G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - R/c)}{4\pi R}.$$

Um den Schalldruck in einem Beobachtungspunkt $(\boldsymbol{x}, t)$ zu erhalten, muß über die Quellenbelegung im Gebiet Ω vom Zeitpunkt 0 bist zum Zeitpunkt t integriert werden. Zusammengefaßt läßt sich für Gleichung (C.6) schreiben:

$$\begin{aligned} 4\pi\tilde{p}(\boldsymbol{x}, t) = & \int_T \int_\Omega \frac{\delta(g)}{R} \left(q_f + \frac{M_n}{c} \frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} \right) \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau \\ & + \int_T \int_\Omega \frac{\delta(g)}{R} \, \bar{\boldsymbol{\nabla}} \left(p_f \, \boldsymbol{n} \, \delta(f) \right) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau \\ & + \int_T \int_\Omega \frac{\delta(g)}{R} \frac{\bar{\partial}}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} \left(\frac{M_n}{c} \, p_f \, \delta(f) \right) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau \\ = & \; I_1 + I_2 + I_3 \, . \end{aligned} \tag{C.7}$$

Der aus der Fundamentallösung stammende DIRAC Impuls $\delta(g)$ ermöglicht im Zusammenhang mit homogenen Anfangsbedingungen eine analytische Auswertung des Zeitintegrals. Mit dem anderen DIRAC Impuls $\delta(f)$ lassen sich die drei Volumenintegrale auf Randintegrale reduzieren.

C.3 Die allgemeine Kirchhoffsche Integralgleichung

Damit die Integrale unter Ausnutzung der speziellen Eigenschaften der DIRAC Distribution vereinfacht werden können, müssen zunächst die Integralkerne von den Operatoren befreit werden, die zum Teil auch auf die DIRAC Distributionen wirken. Zunächst werden die Operatoren in den Integralen I_2 und I_3 auf die Fundamentallösung "übergewälzt". Dabei entsteht ein Randintegral und ein Gebietsintegral, das in den Zeitpunkten $\tau = 0$ und $\tau = t$ ausgewertet werden muß.

$$I_2 = \underbrace{\int\limits_T \int\limits_{\Gamma_\infty} \boldsymbol{n} \frac{\delta(g)}{R} p_f \boldsymbol{n} \delta(f) \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{y}} \mathrm{d}\tau}_{0} - \int\limits_T \int\limits_\Omega \bar{\boldsymbol{\nabla}} \left(\frac{\delta(g)}{R} \right) p_f \boldsymbol{n} \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau$$

$$I_3 = \underbrace{\left[\int\limits_\Omega \frac{\delta(g)}{R} \frac{M_n}{c} p_f \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right]_0^t}_{0} - \int\limits_T \int\limits_\Omega \frac{\bar{\partial}}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\delta(g)}{R} \right) \frac{M_n}{c} p_f \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau$$

Da die Fundamentallösung im Unendlichen (auf Γ_∞) null ist, verschwindet das Randintegral in I_2. Die Kausalitätsbedingung sorgt für ein Verschwinden der Fundamentallösung am Ende des Zeitintervalls zum Zeitpunkt $\tau = t$. Außerdem werden homogene Anfangsbedingungen für $\tau = 0$ angenommen. Somit verschwindet das Gebietsintegral in I_3.

Um die Operatoren aus den Integralen herausziehen zu können, wird eine Transformation der Ableitungsvorschriften durchgeführt, so daß die Integrationsgrenzen nicht von den Variablen abhängen, nach denen differenziert wird. Vorher wird noch die Ortsableitung des DIRAC Impulses in eine Zeitableitung umgewandelt.

$$\bar{\boldsymbol{\nabla}}_y \frac{\delta(g)}{R} = \bar{\boldsymbol{\nabla}}_y R \left(-\frac{1}{R^2} \delta(g) - \frac{1}{cR} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \delta(g) \right)$$

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} \frac{\delta(g)}{R} = -\frac{\bar{\partial}}{\partial t} \frac{\delta(g)}{R}$$

Einsetzen in Gleichung (C.7) ergibt

$$\begin{aligned} 4\pi \tilde{p}(\boldsymbol{x}, t) = \quad & \int\limits_T \int\limits_\Omega \frac{\delta(g)}{R} \left(q_f + \frac{M_n}{c} \frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} \right) \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau \\ & - \int\limits_T \int\limits_\Omega \frac{\delta(g)}{R^3} \boldsymbol{R n} \, p_f \, \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau \\ & + \frac{1}{c} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \int\limits_T \int\limits_\Omega \frac{\delta(g)}{R^2} \, p_f \left(R M_n - \boldsymbol{R n} \right) \delta(f) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \mathrm{d}\tau \, . \end{aligned}$$

Nun können mit den Transformationen

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}f\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}g}{1 - M_R}$$

und den DIRAC Impulsen $\delta(f)$ und $\delta(g)$ die Integrale über $\mathrm{d}f$ und über $\mathrm{d}\tau$ ausgewertet werden. $\Gamma_{\boldsymbol{\eta}}$ ist der bewegte Rand in körperfesten Koordinaten $\boldsymbol{\eta}$.

Damit lautet die allgemeine KIRCHHOFF-Formel für einen bewegten Körper

$$\begin{aligned} 4\pi\tilde{p}(\boldsymbol{x}, t) = \quad & \int\limits_{\Gamma} \left\{ \left(q_f + \frac{M_n}{c}\frac{\partial p_f}{\partial \tau} \right) \frac{1}{R_1} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\ & + \frac{1}{c}\frac{\bar{\partial}}{\partial t} \int\limits_{\Gamma} \left\{ p_f \, \frac{R M_n - \boldsymbol{R}\boldsymbol{n}}{R R_1} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\ & - \int\limits_{\Gamma} \left\{ p_f \, \frac{\boldsymbol{R}\boldsymbol{n}}{R^2 R_1} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \tag{C.8}$$

mit $R_1 = R(1 - M_R)$. Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern sind zur retardierten Zeit τ^* auszuwerten. Man erhält τ^* aus der Gleichung

$$\tau^* = t - R/c = t - \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(\tau^*)|}{c} \, .$$

Zur Ermittlung von τ^* kann bei geradliniger Bewegung mit Unterschallgeschwindigkeit die Gleichung (2.16) verwendet werden.

C.4 Formulierung für die numerische Berechnung

Die allgemeine KIRCHHOFFsche Integralgleichung (C.8) wird für die Anwendung in einem Computerprogramm noch umgeformt. Die Zeitableitung des zweiten Integrals läßt sich für ein festes $\boldsymbol{\eta}$ analytisch berechnen. Die Ableitung des Drucks im ersten Integral wird ebenfalls ausgewertet.

Wenn die Zeitableitung in einem Punkt $\boldsymbol{\eta}$ auf der bewegten Oberfläche mit $\dot{p_f}$ bezeichnet wird, gilt:

$$\dot{p}_f = \frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}} = \frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}} \boldsymbol{\nabla} p_f = \frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla} p_f \, .$$

Diese Beziehung kann wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{y}}} = \dot{p}_f - \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla} p_f = \dot{p}_f - c\,q_f\,M_n - c\,\boldsymbol{\nabla}_2\,p_f\,\boldsymbol{M}_t \tag{C.9}$$

mit dem Oberflächengradienten $\boldsymbol{\nabla}_2$. $\boldsymbol{M}_t$ ist die Tangentialkomponente des Machvektors bezüglich S.

Für ein festes $\boldsymbol{\eta}$ gilt mit $g = t - \tau - R(\tau)/c = 0$:

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_R}\,\frac{\bar{\partial}}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\,.$$

Da $\mathrm{d}\varGamma_{\boldsymbol{\eta}}$ unabhängig von t ist, kann man den Operator in das Integral hineinziehen. Der Integrand wird als stetig angenommen, so daß man die Derivation in eine gewöhnliche Ableitung umwandeln kann. Somit ist

$$X = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\left(p_f\,\frac{RM_n - \boldsymbol{Rn}}{RR_1}\right)$$

zu berechnen. Die hierfür benötigten Ableitungen sind im Anhang C.5 aufgeführt. Man erhält:

$$\begin{aligned} X = {} & \frac{\dot{p}_f}{c}\,\frac{RM_n - \boldsymbol{Rn}}{RR_1} \\ & + \frac{p_f}{c}\frac{1}{R_1}\left(\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{n}} + \dot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{R}}{R}\dot{\boldsymbol{n}} + \frac{RM_n - \boldsymbol{Rn}}{R_1}\dot{\boldsymbol{M}}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right) \\ & + p_f\frac{1}{RR_1}\left(M_n - \frac{\boldsymbol{Rn}M_R}{R} + \frac{(RM_n - \boldsymbol{Rn})M_R}{R}\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \frac{(RM_n - \boldsymbol{Rn})(M_R^2 - \boldsymbol{M}^2)}{R_1}\right) \end{aligned} \tag{C.10}$$

Bei geradliniger Bewegung der Oberfläche S verschwinden die Faktoren $\dot{\boldsymbol{n}}$ und $\dot{\boldsymbol{M}}$, so daß die zweite Zeile in obigem Ausdruck verschwindet. Die Ableitungen (C.10) und (C.9) werden in die Integralgleichung (C.8) eingesetzt. Man erhält eine Formulierung, die sich in ein Randelementprogramm implementieren läßt.

$$
\begin{aligned}
4\pi\tilde{p}(\boldsymbol{x},t) = \quad & \int\limits_{\Gamma} \left\{ q_f \frac{1-M_n^2}{R_1} - \boldsymbol{\nabla}_2 p_f \, \frac{\boldsymbol{M}_t M_n}{R_1} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\
+ & \int\limits_{\Gamma} \left\{ \frac{\dot{p}_f}{c} \left(\frac{RM_n - \boldsymbol{Rn}}{R_1} + M_n \right) \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \\
+ & \int\limits_{\Gamma} \left\{ p_f \, \frac{(RM_n - \boldsymbol{Rn})(1-M^2)}{{R_1}^3} \right\}_{\tau^*} \mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{\eta}} \, .
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

Diese Formel ist äquivalent zur Gleichung (3.12), wie in Abschnitt 3.2 dargestellt wurde.

C.5 Zeitableitungen verschiedener Größen

$$\frac{1}{c}\frac{\partial p_f}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}} = \frac{1}{c}\dot{p}_f$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\boldsymbol{R} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c} = -\boldsymbol{M}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}R = \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R}\frac{\boldsymbol{v}}{c} = -M_R$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\frac{\boldsymbol{R}}{R} = -\frac{1}{R}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{R}\left(\frac{M_R}{R^2}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}M_R - \boldsymbol{M}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\,\boldsymbol{n}\right) &= \boldsymbol{n}\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\frac{\boldsymbol{R}}{R} + \frac{1}{c}\,\frac{\boldsymbol{R}}{R}\,\dot{\boldsymbol{n}} \\
&= \boldsymbol{n}\,\frac{1}{R}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}M_R - \boldsymbol{M}\right) + \frac{\boldsymbol{R}}{R}\frac{\dot{\boldsymbol{n}}}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}M_R &= \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\left(\boldsymbol{M}\,\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right) = \boldsymbol{M}\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}\frac{\boldsymbol{R}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\,\dot{\boldsymbol{M}} \\
&= \boldsymbol{M}\frac{1}{R}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}M_R - \boldsymbol{M}\right) + \frac{\boldsymbol{R}}{R}\frac{\dot{\boldsymbol{M}}}{c} \\
&= \frac{1}{R}\left(M_R^2 - M^2\right) + \frac{\boldsymbol{R}}{R}\frac{\dot{\boldsymbol{M}}}{c}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_{\boldsymbol{\eta}}}M_n = \frac{1}{c}(\boldsymbol{M}\,\dot{\boldsymbol{n}} + \dot{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{n})$$

C.6 Distributionen

Das Funktional

Gegeben ist ein Testfunktionenraum A als eine Menge von Funktionen. Diese Funktionen sowie deren Ableitungen verschwinden außerhalb eines endlichen

Intervalls. Ein Funktional auf dem Funktionenraum A ist eine Regel zur Berechnung eines Zahlwerts für jede Funktion $\Phi(x)$ aus A. So erzeugt beispielsweise eine integrierbare Funktion $f(x)$ gemäß der Regel

$$F[\Phi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f(x), \Phi(x) \rangle$$

ein *lineares*, *stetiges* Funktional $F[\Phi]$ auf A (siehe [11]); die Funktion f wird durch ihr Funktional F repräsentiert.

Alle stetigen, linearen Funktionale auf dem Testfunktionenraum A werden *Distributionen* genannt. Es wird unterschieden zwischen

- *regulären* Distributionen :
  $f(x)$ ist eine gewöhnliche Funktion (z.B. Heaviside-Funktion $h(x)$), und

- *singulären* Distributionen:
  $f(x)$ ist eine nicht gewöhnliche Funktion (z.B. DIRAC Distribution $\delta(x)$). Diese Funktionen sind nicht punktweise definiert, sie existieren nur innerhalb eines Integrals. Die übliche Schreibweise $\delta(x)$ ist insofern irreführend. Auch singuläre Distributionen können lineare, stetige Funktionale erzeugen. So erzeugt zum Beispiel die DIRAC Distribution das lineare, stetige Funktional $\Delta[\Phi]$.

Derivationen

Mit dem Konzept der Derivationen läßt sich die Definition der Differentiation auf Distributionen erweitern. Hierfür muß zunächst die Differentiation von gewöhnlichen Funktionen mit Hilfe des zugehörigen Funktionals ausgedrückt werden.

Das Produkt $f'(x)\Phi(x)$ sei im Intervall (a, b) integrierbar. Für das entsprechende Funktional $F[\Phi]$ kann man unter Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes schreiben:

$$\begin{aligned}\langle f'(x), \Phi(x) \rangle &= \int\limits_a^b f'(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\Phi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\langle f(x), \Phi'(x) \rangle\,,\end{aligned}$$

wenn die Testfunktionen $\Phi(x)$ außerhalb des Intervalls (a, b) null sind.

Man kann nun die Ableitung von $f(x)$ mit dem Funktional $F'[\Phi]$ identifizieren. Man erhält

$$F'[\Phi] = -\langle f(x), \Phi'(x)\rangle = -F[\Phi'] \,.$$

Diese Gleichung erlaubt es, die Derivation einer Distribution zu definieren, da die Ableitung der Testfunktion Φ existiert. Zum Beispiel läßt sich die Derivation der Heaviside-Funktion $h(x)$ ermitteln. Dies ist eine gewöhnliche Funktion, und somit ist $H[\Phi]$ eine reguläre Distribution. Da $h(x)$ aber nicht stetig ist, stimmen Ableitung und Derivation nicht überein. Nur für *stetige* Funktionen sind beide identisch.

$$H[\Phi] = \langle h(x), \Phi(x)\rangle = \int\limits_a^b h(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $a \le 0 \le b$. Mit der Definition der Derivation folgt daraus:

$$H'[\Phi] = -H[\Phi'] = -\int\limits_0^b \Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(0) = \langle \delta(x), \Phi(x)\rangle \,.$$

$H'[\Phi]$ ist die Derivation der Heaviside Distribution. Verwendet man die übliche symbolische Notation, darf man schreiben:

$$H'[\Phi] = \langle \bar{h}'(x), \Phi(x)\rangle = \langle \delta(x), \Phi(x)\rangle = \Delta[\Phi] \quad \text{oder} \quad \bar{h}'(x) = \delta(x).$$

Für die gewöhnliche Ableitung von $h(x)$ gilt natürlich

$$h'(x) = 0 \qquad \text{für} \quad x \neq 0.$$

Gegeben sei nun eine gewöhnliche, stückweise stetige Funktion $f(x)$ mit einem einzigen Sprung von $\Delta f = f(c^+) - f(c^-)$ im Intervall $[a, b]$. Wenn außerdem $f'(x)$ in $[a, c)$ und $(c, b]$ existiert, ist die Funktion

$$g(x) = f(x) - \Delta f \cdot h(x - c)$$

stetig in $[a, b]$ und $g'(x) = f'(x)$ existiert. Daraus ergibt sich die Derivation der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{g}'(x) &= g'(x) = f'(x) \\ \bar{g}'(x) &= \bar{f}'(x) - \Delta f\ \delta(x - c) \\ \bar{f}'(x) &= f'(x) + \Delta f\ \delta(x - c) \end{aligned} \tag{C.12}$$

Einige Rechenregeln für Derivationen

Summenregel:

$$[f_1(x) + f_2(x)]' = \bar{f}_1'(x) + \bar{f}_2'(x) \tag{C.13}$$

Mehrere (n) Sprünge:

$$\bar{f}'(x) = f'(x) + \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \; \delta(x - c_i) \tag{C.14}$$

Höhere Derivationen (Voraussetzung: Φ ist hinreichend häufig differenzierbar):

$$\begin{aligned} &F^{(n)}[\Phi] = (-1)^n \; F[\Phi^{(n)}] \\ &\bar{f}''(x) = f''(x) + \sum_{i=1}^{m} \Delta f_i' \; \delta(x - d_i) + \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \; \bar{\delta}'(x - c_i) \end{aligned} \tag{C.15}$$

Mehrere Dimensionen; Sprung von $f(y_i)$ entlang eines Rands $g(y_i) = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{\partial} f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \Delta f \frac{\partial g}{\partial y_i} \delta(g) \\ &\frac{\partial g}{\partial y_i} = n_i \quad \text{Normalenvektor, zeigt in Richtung} \quad g^+ \end{aligned} \tag{C.16}$$

Kettenregel:

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial y} f\,(x(y)) = \frac{\bar{\partial} f}{\partial x} \; \frac{\bar{\partial} x}{\partial y} \tag{C.17}$$

Beliebiger Operator ($*$ steht für Rotation, Divergenz oder Gradient):

$$\bar{\boldsymbol{\nabla}} * \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{f} + (\Delta \boldsymbol{f}) * \boldsymbol{\nabla} g \; \delta(g) \tag{C.18}$$

Partielle Integration, vorausgesetzt u und v haben keinen Sprung im gleichen Punkt:

$$\int_a^b u \bar{v}' \; \mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \bar{u}' v \; \mathrm{d}x \tag{C.19}$$

Literaturverzeichnis

[1] AHRENS, H. ; DINKLER, D.: *Finite-Element-Methoden Teil I/II*. Bericht Nr. 88-50 / 88-51, Institut für Statik der TU Braunschweig, 1991.

[2] ANTES, H.: *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluiddynamik*. Teubner, Stuttgart, 1988.

[3] ANTES, H.: *Applications in environmental noise*. In: CISKOWSKI/BREBBIA (Hrsg): *Advances in BEM in Acoustics*, Kap. 12. Springer Verlag, New York, 1991.

[4] ASTLEY, R.J. ; BAIN, J.G.: *A three-dimensional boundary element scheme for acoustic radiation in low Mach number flows*. J. Sound Vib., 109(3):445–465, 1986.

[5] BATHE, K.J.: *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.

[6] BREBBIA, C.A.: *The boundary element method for engineers*. Pentech Press, London, 1968.

[7] BRENTNER, K.S. ; FARASSAT, F.: *Helicopter noise prediction: the current status and future direction*. Journal of Sound and Vibration, 170(1):79–96, 1994.

[8] CRUSE, T.A.: *A Direct Formulation and Numerical Solution of the general Transient Elastodynamic Problem II*. J. Math. Analysis and Applic., 22:341–355, 1968.

[9] CRUSE, T.A. ; RIZZO, F.J.: *A Direct Formulation and Numerical Solution of the general Transient Elastodynamic Problem I*. J. Math. Analysis and Applic., 22:244–259, 1968.

[10] DE LACERDA, L.A. ; WROBEL, L.C. ; MANSUR, W.J.: *A boundary integral formulation for two-dimensional acoustic radiation in a subsonic uniform flow*. J. Acoust. Soc. Am., 100(1):98–107, 1996.

[11] DOETSCH, G.: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*. R. Oldenbourg Verlag GmbH, München, 6. Auflage, 1989.

[12] DOHNER, J.L. ; SHOURESHI, R. ; BERNHARD, R.J.: *Transient Analysis of Three-Dimensional Wave Propagation Using the Boundary Element Method*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 24, 1987.

[13] DOWLING, A.P.: *Convective amplification of real simple sources*. J. Fluid Mech., 74(3):529–546, 1976.

[14] ESTORFF, O. VON: *Discretization methods in acoustics and noise control*. In: *Proc. of the third European Conference on Noise Control EURO-NOISE 98*, München, 1998.

[15] ESTORFF, O. VON ; HOMM, A. ; BARTELS, F.: *Sound radiation of a cantilever plate – comarisons of BEM results with experimental data*. In: *Proc. of the 6th int. conf. BETECH91*, Southampton, 1991.

[16] FARASSAT, F.: *Theory of noise generation from moving bodies with application to helicopter rotors*. Tech.Rep. R-451, NASA, 1975.

[17] FARASSAT, F.: *Discontinuities in aerodynamics and aeroacoustics: the concept and applications of generalized derivatives*. Journal of Sound and Vibration, 55(2):165–193, 1977.

[18] FARASSAT, F. ; MYERS, M.K.: *Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces*. Journal of Sound and Vibration, 123(3):451–460, 1988.

[19] FARASSAT, F. ; SUCCI, G.P.: *The prediction of helicopter rotor discrete frequency noise*. Vertica, 7:309–320, 1983.

[20] FFOWCS WILLIAMS, J.E. ; HAWKINGS, D.L.: *Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 264A:321–342, 1969.

[21] GAUL, L. ; SCHANZ, M.: *Dynamics of viscoelastic solids treated by boundary element approaches in time domain*. European Journal of Mechanics, A/Solids, 13(4):43–59, 1994.

[22] GENNARETTI, M. ; MORINO, L.: *A boundary element method for the potential, compressible aerodynamics of bodies in arbitrary motion*. Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, January 1992.

[23] GERTHSEN, C. ; KNESER, H.O. ; VOGEL, H.: *Physik*. Springer Verlag, 16 . Auflage, 1989.

[24] GUIGGIANI, M. ; GIGANTE, A.: *A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method*. Transactions of the ASME, 57:906–915, December 1990.

[25] HACKBUSCH, W.: *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Teubner, Stuttgart, 1989.

[26] HESS, J.L. ; SMITH, A.M.O.: *Calculation of potential flow around arbitrary bodies*. Progress in Aeronautical Sciences, 8, 1966.

[27] HOWE, M.S.: *The generation of sound by aerodynamic sources in an inhomogeneous steady flow*. J. Fluid Mech., 67(3):597–610, 1975.

[28] JÄGER, M.: *Entwicklung eines effizienten Randelementeverfahrens für bewegte Schallquellen*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 17-1994, Braunschweig, 1994.

[29] JONES, D.S.: *Generalised functions*. McGraw-Hill, London,New York, Toronto, Sydney, 1966.

[30] JUN, L. ; BEER, G. ; MEEK, J.L.: *Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss quadrature*. Engineering Analysis, 3(2):118–123, 1985.

[31] LIGHTHILL, M.J.: *On sound generated aerodynamically, I General Theory*. Proceedings of the Royal Society, 221A:564–87, 1952.

[32] LONG, L.: *The compressible aerodynamics of rotating blades based on an acoustic formulation*. Tech.Rep. 2197, NASA, 1983.

[33] LYRINTZIS, A.S. ; MANKBADI, R.R.: *Prediction of the Far-Field Jet Noise Using Kirchhoff's Formulation*. AIAA Journal, 34(2):413–416, February 1996.

[34] MANSUR, W.J.: *A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the BEM*. Dissertation, University of Southampton, 1983.

[35] MANSUR, W.J. ; BREBBIA, C.A.: *Further Developments on the Solution of the Transient Wave Equation*. In: BREBBIA, C.A. (Hrsg): *Topics in Boundary Element Research*, Band 2, Kap. 4. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[36] MEISE, T.: *Randelementverfahren zur Berechnung der Ausbreitung skalarer Wellen im 3D-Zeit- und Frequenzbereich*. Techn.-wiss. Mitteilungen des Inst. f. konstr. Ing.bau der Ruhr Universität Bochum Nr. 90-6, Bochum, 1990.

[37] MORGANS, W.R.: *The Kirchhoff formula extended to a moving surface*. Philosophical Magazine, 9:141–161, 1930.

[38] MORINO, L.: *Boundary integral equations in aerodynamics*. Appl. Mech. Rev., 46(8):445–466, Augugst 1993.

[39] MORINO, L. ; BHARADVAJ, B.K. ; FREEDMAN, M.I. ; TSENG, K.: *Boundary integral equation for wave equation with moving boundary and applications to compressible aerodynamics of airplanes and helicopters*. Computational Mechanics, 4:231–243, 1989.

[40] MORINO, L. ; GENNARETTI, M. ; IEMMA, U. ; SALVATORE, F.: *Aerodynamics and aeroacoustics of wings and rotors via BEM - unsteady, transonic, and viscous effects*. Computational Mechanics, 21:265–275, 1998.

[41] MORINO, L. ; KUO, C.-C.: *Subsonic potential aerodynamics for complex configurations*. AIAA Journal, 12(2):191–197, February 1974.

[42] MORSE, P.M. ; INGARD, K.U.: *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, Princeton, 1986.

[43] MYERS, M.K. ; HAUSMANN, J.S.: *Computation of acoustic scattering from a moving rigid surface*. J. Acoust. Soc. Am., 91(5):2594–2605, May 1992.

[44] PEIRCE, A. ; SIEBRITS, E.: *Stability analysis and design of time stepping schemes for general elastodynamic boundary element methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(2):319–342, 1997.

[45] P.M. MORSE ; H. FESHBACH: *Methods of theoretical physics I, II*. McGraw-Hill, New York, 1953.

[46] RAYLEIGH, J.W.S.: *The theory of sound*. Dover Publications, 2. Auflage, 1945.

[47] SIGLOCH, H.: *Technische Fluidmechanik*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2. Auflage, 1991.

[48] SYSNOISE: *Theoretical manual*. Numerical Integration Technologies N.V., Leuven, Belgium, 1. Auflage, 1993.

[49] TAYLOR, K.: *Acoustic generation by vibrating bodies in homentropic potential flow at low Mach number*. Journal of Sound and Vibration, 65(1):125–136, 1979.

[50] TIETJENS, O.: *Strömungslehre*, Band 1. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

[51] TRÖNDLE, G.: *Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 21-1995, Braunschweig, 1995.

[52] WOLFRAM, S.: *Mathematica*. Addison-Wesley, Redwood City, 2. Auflage, 1991.

[53] WU, T.W. ; LEE, L.: *A direct boundary integral formulation for acoustic radiation in a subsonic uniform flow*. J. Sound Vib., 175(1):51–63, 1994.

[54] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L.: *The finite element method*. McGraw-Hill, London, 1989.

Braunschweiger Schriften zur Mechanik — BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

1–1990 Plonski,T.:
Dynamische Analyse von schnelldrehenden Kreiszylinderschalen

2–1991 Wegener, K.:
Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp

3–1991 Gröhlich, H.:
Finite–Element–Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle ohne explizite Fließflächenformulierung

4–1992 Hesselbarth, H.:
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädigung mit dem Prinzip der zellulären Automaten

5–1992 Schlums, H.:
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem Verhalten metallischer Werkstoffe

6–1992 Kublik, F.:
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein– und mehrachsigen Versuchsführungen im Hochtemperaturbereich

7–1992 Bechtloff, J.:
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen

8–1993 Müller, M.:
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbauten

9–1993 Senker, P.:
Stabilitätsanalyse elastischer Rotorsysteme

10–1993 Cheng, W.:
Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/Mindlin Platte

11–1993 Wiebe, T.:
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Randintegralgleichungen

12–1993 Hahne, M.:
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopischen Stoffgesetz

13–1993 Heisig, G.:
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich gekrümmten Bohrlöchern

14–1994 Araújo, F. C.:
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE–Methode

15–1994 Kirsten, M.:
Untersuchung zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik

16–1994 Latz, K.:
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern

17–1994 Jäger, M.:
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen

18–1994 August, M.:
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt

19–1994 Erbe, M.:
Zur Simulation des Rißwachstums in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente

20–1995 Gerdes, R.:
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich

21–1995 Tröndle, G.:
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode

22–1996 Degenhardt, R.:
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund

23–1996 Feise, H.J.:
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern

24–1996 Haubrok, D.:
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2D-Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM

25–1996 Lehmann, L.:
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten

26–1996 Klein, R.:
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitzen

27–1996 Kopp, T.:
Simulation großer inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen

28–1997 Harder, J.:
Simulation lokaler Fließvorgänge in Polykristallen

29–1997 Lewerenz, M.:
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten

30–1997 Meywerk, M.:
Stabilität und Verschleiß bei auf Schienen laufenden Eisenbahnradsätzen

31–1997 Plagge, F.:
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen

32–1997 Neubert, M.:
Richtungsregelung beim Tiefbohren

33–1998 Sangi, D.:
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen

34–1998 Thielecke, F.:
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung

35–1998 Vietgen, J.:
Numerische Simulation duktilen Rißwachstums mit Berücksichtigung von Schädigung

36–1998 Läer, B.:
Einfluß transienter Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik

37–1998 Scheld, C.:
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks